OBZORY

1/2021 (50)

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2021 ročník 50

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 1/2021 Volume 50

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2021 (50)

Vážení čitatelia Obzorov matematiky, fyziky a informatiky, milí priaznivci matematiky, fyziky a informatiky!

Píšem netradične, v prvom čísle nového ročníka. Cítim potrebu aspoň stručne pripomenúť históriu nášho časopisu. Začala sa písať v roku 1972, keď sa zrodil časopis Matematické obzory. Časopis Matematické obzory založili na Prírodovedeckej fakulte UK profesori Beloslav Riečan a Štefan Znám. S miernym oneskorením oproti Matematickým obzorom začali vychádzať aj Fyzikálne obzory. Časopis Fyzikálne obzory založil na vtedajšej Pedagogickej fakulte v Nitre prof. Daniel Kluvanec. V roku 1993 sa tieto dva časopisy zlúčili a vznikli Obzory matematiky, fyziky a informatiky (OMFI). Takto OMFI založili traja profesori, vynikajúci pedagógovia. Prvé dva ročníky OMFI sa pripravovali na Matematickom ústave SAV a vychádzali dvakrát do roka. V roku 1995 sa šéfredaktorom OMFI stal prof. Daniel Kluvanec, a hlavná redakcia OMFI prešla do Nitry, do vydavateľstva Protonit. Od toho ročníka OMFI vychádzajú štyrikrát do roka. Táto zmena periodicity bola do veľkej miery zásluhou prof. Kluvanca a jeho manažérskych schopností. V roku 2016 prevzala vydávanie časopisu Jednota slovenských matematikov a fyzikov. Prof. Kluvanec mal však stále „ochrannú ruku“ nad kvalitou časopisu a aj nad jeho periodicitou. Tento rok už vydávame jubilejný 50. ročník časopisu. Je to akýsi predel v živote časopisu a to, žiaľ, nielen kvôli jubileu. Na sklonku minulého roka sme sa navždy rozlúčili s prof. Danielom Kluvancom, ktorý podľahol zákernej chorobe.

Bohužiaľ, už ani jeden z trojice zakladateľov OMFI nie je medzi nami. Najprv sme sa navždy rozlúčili s prof. Štefanom Známom – ešte v roku 1993. Nedávno, v roku 2018, sme sa rozlúčili s prof. Beloslavom Riečanom. A, ako som už spomenul, tesne pred koncom minulého roka nás opustil aj prof. Daniel Kluvanec. Ľudia, ktorí poznali prof. Kluvanca osobne, vedia, že bol do poslednej chvíle svojho života „dušou“ nášho časopisu. Aktívne viedol našu fyzikálnu redakciu, ale zaujímal sa aj o jeho celkový vzhľad a kvalitu. Bude nám preto v redakcii veľmi chýbať...

Stojí pred nami výzva udržať kvalitu, ale aj periodicitu časopisu. To sa, samozrejme, nebude dať dodržať bez aktívnej spolupráce s našimi čitateľmi a priaznivcami. Rád by som z tohto miesta vyzval všetkých zanietených učiteľov matematiky, fyziky a informatiky, aby sa na stránkach OMFI podelili so svojimi skúsenosťami a inovatívnymi prístupmi k vysvetľovaniu novej látky, či s inými postrehmi z triedy, ktoré by mohli zaujímať aj druhých kolegov.

Záverom mi nedá nespomenúť pandémiu Covid 19, s ktorou už viac ako rok bojujeme. A žiaľ, táto zákerná choroba nám vzala už viacerých našich kolegov. Spomeňme si na nich vo chvíľke ticha, a hlavne – spravme všetko, čo je v našich silách a možnostiach každého z nás, aby sa šírenie choroby čím skôr skončilo, a aby sme sa mohli vrátiť k normálnemu životu, aj keď to už bude isto v mnohých ohľadoch iný život.

Martin Kalina

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2021 (50)

VZDELÁVANIE V MATEMATIKE A INFORMATIKE

Riešenie logaritmických nerovníc metódou racionalizácie

Jozef Doboš

Abstract [Solving Logarithmic Inequalities using Method of Rationalization]: In this paper, we would like to show how it is possible to solve logarithmic inequalities using method of rationalization.

Key words: solving logarithmic inequalities, method of rationalization, test point method

Súhrn: V tomto článku chceme ukázať, ako možno riešiť logaritmické nerovnice metódou racionalizácie.

Kľúčové slová: riešenie logaritmických nerovníc, metóda racionalizácie, metóda testovacích bodov

MESC: H30

Metóda racionalizácie[1] vďačí za svoj názov tomu, že danú nerovnicu prevedieme na racionálnu nerovnicu, ktorú by už žiaci mali vedieť riešiť. Keďže musíme vziať do úvahy aj podmienky, za ktorých majú výrazy v danej nerovnici zmysel, často tak dostávame sústavu racionálnych nerovníc.

Základná myšlienka tejto metódy bola po prvýkrát predstavená v článku [2] pod názvom „zovšeobecnenie metódy intervalov" (dnes sa s touto metódou môžeme stretnúť aj pod názvom „metóda zámeny činiteľov", príp. „metóda dekompozície")[2].

Používame ju na riešenie nerovníc, ktoré pre tento účel majú byť zapísané v jednom z nasledujúcich tvarov:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0,$$

kde

$$\begin{aligned} P(x) &= \big(u_1(x) - r_1(x)\big)\big(u_2(x) - r_2(x)\big)\dots\big(u_n(x) - r_n(x)\big), \\ Q(x) &= \big(v_1(x) - s_1(x)\big)\big(v_2(x) - s_2(x)\big)\dots\big(v_k(x) - s_k(x)\big). \end{aligned}$$

[1] V origináli: метод рационализации.

[2] V origináli: обобщение метода интервалов, метод замены множителей, метод декомпозиции.

Metóda racionalizácie je založená na monotónnosti funkcií. Základný princíp si vysvetlíme na nerovnosti
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(c)-g(d)} > 0,$$
v ktorej máme dve rastúce funkcie f a g. Nech čísla a, b sú z definičného oboru funkcie f. Nech čísla c, d sú z definičného oboru funkcie g. Potom platí[3]

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(c)-g(d)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a-b}{c-d} > 0. \tag{1}$$

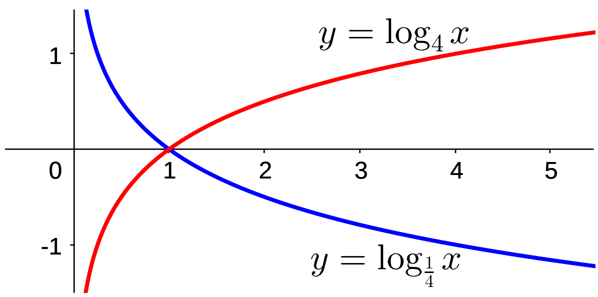
Naozaj, stačí preskúmať dva prípady:

$$1) \begin{cases} f(a)-f(b) > 0 & \Leftrightarrow \quad a-b>0, \\ g(c)-g(d) > 0 & \Leftrightarrow \quad c-d>0, \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} f(a)-f(b) < 0 & \Leftrightarrow \quad a-b<0, \\ g(c)-g(d) < 0 & \Leftrightarrow \quad c-d<0. \end{cases}$$

Skôr, ako prejdeme k riešeniu konkrétnych logaritmických nerovníc, si pripomenieme definíciu logaritmu. Predpokladajme, že $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Logaritmus čísla b pri základe a je ten exponent c, na ktorý treba umocniť základ a, aby sme dostali logaritmované číslo b. Inými slovami:

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b. \tag{2}$$

Pozrime sa, v akom vzťahu sú grafy funkcií $y = \log_a x$ a $y = \log_{\frac{1}{a}} x$.
Pre $a = 4$ ich vidíme na obr. 1.



Obrázok 1.

Tieto grafy sú súmerné podľa osi x. Naozaj, pre každé kladné reálne číslo b platí

$$\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b. \tag{3}$$

[3]Analogicky pre < 0.

Môžeme to ľahko overiť nasledujúcim spôsobom:

$$\log_{\frac{1}{a}} b = c \Leftrightarrow \left(\tfrac{1}{a}\right)^c = b \Leftrightarrow a^{-c} = b \Leftrightarrow \log_a b = -c.$$

Ukážeme si použitie vzorca (3) na riešenie logaritmickej nerovnice. Spolu s metódou testovacích bodov.

Úloha 1. Riešme nerovnicu (pozri [7])

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{2x-1}{x+4} \leq 0. \tag{4}$$

Riešenie. Podľa (3) môžeme prepísať nerovnicu (4) do ekvivalentného tvaru

$$\log_4 \frac{2x-1}{x+4} \geq 0. \tag{5}$$

Ak $a > 1$, potom funkcia $y = \log_a x$ je rastúca. Odtiaľ vyplýva, že

$$\text{ak } a > 1, \text{ potom platí} \quad \begin{cases} \log_a x > 0 & \text{pre každé } x > 1, \\ \log_a x = 0 & \text{pre } x = 1, \\ \log_a x < 0 & \text{pre každé } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Teda $\log_4 b \geq 0$ práve vtedy, keď $b \geq 1$. To nám umožňuje prepísať nerovnicu (5) do ekvivalentného tvaru

$$\frac{2x-1}{x+4} \geq 1. \tag{6}$$

Racionálnu nerovnicu (6) budeme riešiť metódou testovacích bodov (pozri [5], [6]). Najskôr určíme jej definičný obor. Pretože v menovateli zlomku nemôže byť nula, musí platiť $x \neq -4$. Teda číslo $x = -4$ určite nepatrí do oboru pravdivosti nerovnice (6). Potom vyriešime odpovedajúcu rovnicu

$$\frac{2x-1}{x+4} = 1. \tag{7}$$

Rovnica (7) má jediný koreň $x = 5$. Ľahko vidieť, že číslo $x = 5$ patrí tiež do oboru pravdivosti nerovnice (6). Zostáva nám ešte preskúmať intervaly $(-\infty, -4)$, $(-4, 5)$ a $(5, \infty)$.

Obrázok 2.

Z každého intervalu vyberieme jeden testovací bod. Z intervalu $(-\infty, -4)$ vyberieme napríklad $x = -5$, z intervalu $(-4, 5)$ vyberieme napríklad $x = 0$ a z intervalu $(5, \infty)$ vyberieme napríklad $x = 6$. Dosadením do nerovnice (6) zistíme, že čísla $x = -5$ a $x = 6$ patria do jej oboru pravdivosti, ale číslo $x = 0$ nepatrí do jej oboru pravdivosti. Teda k číslu $x = 5$ do oboru pravdivosti nerovnice (6) pribudnú intervaly $(-\infty, -4)$ a $(5, \infty)$.

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (4) je množina[4] $P = (-\infty; -4) \cup [5; \infty)$.

V ďalšom budeme potrebovať vzorec

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \tag{8}$$

ktorý platí pre $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$, $c \neq 1$.

Naozaj, ak $r = \log_a b$, $s = \log_c a$, potom $a^r = b$, $c^s = a$. Odtiaľ

$$b = a^r = (c^s)^r = c^{rs},$$

čo vzhľadom na (2) dáva $\log_c b = rs = \log_a b \cdot \log_c a$.

Ak základ logaritmu obsahuje neznámu, pomocou vzorca (8) ho môžeme previesť na logaritmus s konštantným základom. Využijeme to pri riešení nasledujúcich logaritmických nerovníc.

Úloha 2. Riešme nerovnicu (pozri [7])

$$\log_{3x+5}(9x^2 + 8x + 8) > 2. \tag{9}$$

Riešenie. Základ logaritmu na ľavej strane nerovnice (9) obsahuje neznámu, preto tento logaritmus upravíme pomocou vzorca (8), pričom za nový základ vezmeme nejakú konštantu väčšiu ako jedna, napríklad $c = 3$. Nerovnica (9) prejde do ekvivalentného tvaru

$$\frac{\log_3(9x^2 + 8x + 8)}{\log_3(3x + 5)} > 2. \tag{10}$$

Nerovnicu (10) budeme riešiť metódou racionalizácie. Pre tento účel ju najskôr upravíme do tvaru $\dfrac{f(a) - f(b)}{g(c) - g(d)} > 0$.

---

[4] Intervaly označujeme podľa normy STN EN ISO 80000-2. Teda $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.

$$\begin{aligned}\frac{\log_3(9x^2+8x+8)}{\log_3(3x+5)} - 2 &> 0,\\ \frac{\log_3(9x^2+8x+8) - 2\log_3(3x+5)}{\log_3(3x+5)} &> 0,\\ \frac{\log_3(9x^2+8x+8) - \log_3(3x+5)^2}{\log_3(3x+5) - \log_3 1} &> 0. \qquad (11)\end{aligned}$$

Potom podľa (1) je nerovnica (11) ekvivalentná s nerovnicou

$$\frac{(9x^2+8x+8) - (3x+5)^2}{(3x+5) - 1} > 0. \qquad (12)$$

Za predpokladu, že $3x+5 \neq 0$, $9x^2+8x+8 > 0$ a $3x+5 > 0$.

Ľahko vidieť, že každé reálne číslo je riešením nerovnice $9x^2+8x+8 > 0$. Stačí overiť, že diskriminant je záporný a že pre $x = 0$ kvadratický trojčlen $9x^2+8x+8$ nadobúda kladnú hodnotu. Prípadne stačí kvadratický trojčlen $9x^2+8x+8$ prepísať do tvaru $(2x+2)^2 + 5x^2 + 4$. Takže jedinou podmienkou zostáva $3x+5 > 0$, t.j. $x > -\frac{5}{3}$.

Po malej úprave prejde nerovnica (12) do tvaru

$$\frac{-22x - 17}{3x+4} > 0.$$

Jej oborom pravdivosti je interval $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{17}{22}\right)$. Podmienka $x > -\frac{5}{3}$ je zrejme splnená pre každé x z tohto intervalu.

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (9) je interval $I = \left(-\frac{4}{3}; -\frac{17}{22}\right)$.

Úloha 3. Riešme nerovnicu (pozri [7], príp. [3])

$$\log_{x^2}(2+x) < 1. \qquad (13)$$

Riešenie. Základ logaritmu na ľavej strane nerovnice (13) obsahuje neznámu, preto tento logaritmus upravíme pomocou vzorca (8), pričom za nový základ vezmeme nejakú konštantu väčšiu ako jedna, napríklad $c = 4$. Nerovnica (13) prejde do ekvivalentného tvaru

$$\frac{\log_4(2+x)}{\log_4(x^2)} < 1. \qquad (14)$$

Nerovnicu (14) budeme riešiť metódou racionalizácie. Najskôr ju upravíme do tvaru $\dfrac{f(a)-f(b)}{g(c)-g(d)} < 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\log_4(2+x)}{\log_4(x^2)} - 1 &< 0, \\ \frac{\log_4(2+x) - \log_4(x^2)}{\log_4(x^2)} &< 0, \\ \frac{\log_4(2+x) - \log_4(x^2)}{\log_4(x^2) - \log_4 1} &< 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Potom podľa (1) je nerovnica (15) ekvivalentná s nerovnicou

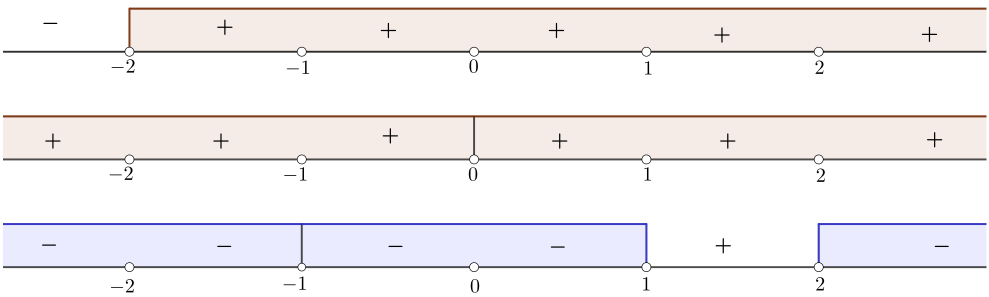
$$\frac{2+x-x^2}{x^2-1} < 0. \tag{16}$$

Za predpokladu, že $x \neq 1$, $2+x>0$ a $x^2>0$.

Tým sme previedli nerovnicu (13) na nasledujúcu sústavu nerovníc:

$$\begin{cases} 2+x>0, \\ x^2>0, \\ \dfrac{2+x-x^2}{x^2-1} < 0, \qquad \Leftrightarrow \qquad \dfrac{(2-x)(x+1)}{(x-1)(x+1)} < 0. \end{cases} \tag{17}$$

Dostali sme sústavu racionálnych nerovníc. Každú z nich riešime samostatne a potom nájdeme prienik množín riešení týchto nerovníc. Použijeme metódu intervalov. Nájdeme nulové body každého mnohočlena tejto sústavy. Sú to čísla $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ a $x = 2$. Pretože každá nerovnica sústavy (17) je ostrá, tieto čísla nie sú riešeniami tejto sústavy. Na číselnej osi ich znázorníme prázdnymi krúžkami. Tieto čísla vyčleňujú na číselnej osi intervaly $(-\infty;-2)$, $(-2;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$ a $(2;\infty)$. Kvôli prehľadnosti si pre každú nerovnicu sústavy (17) nakreslíme samostatnú číselnú os, na ktorej vyznačíme znamienka príslušných racionálnych výrazov. Napríklad, lineárny dvojčlen $2+x$ nadobúda kladné hodnoty pre každé $x>-2$ a záporné hodnoty pre každé $x<-2$. Preto sme na prvej číselnej osi vyznačili znamienka plus napravo od bodu $x=-2$ a znamienko mínus naľavo od tohto bodu.



Obrázok 3.

Číselné osi sme nakreslili tak, aby vyznačené intervaly boli umiestnené priamo pod sebou. Preto môžeme ľahko nájsť prienik množín riešení jednotlivých nerovníc sústavy. Konkrétne, množinu riešení sústavy (17) tvoria tie intervaly, v ktorých máme pod sebou znamienka $+$, $+$, $-$ (v tomto poradí).

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (13) je množina

$$P = (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; \infty).$$

Úloha 4. Riešme nerovnicu (pozri [7])

$$\log_{x^2} \frac{4x-5}{|x-2|} > \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Riešenie. Základ logaritmu na ľavej strane nerovnice (18) obsahuje neznámu, preto tento logaritmus upravíme pomocou vzorca (8), pričom za nový základ vezmeme nejakú konštantu väčšiu ako jedna, napríklad $c = 7$. Nerovnica (18) prejde do ekvivalentného tvaru

$$\frac{\log_7 \frac{4x-5}{|x-2|}}{\log_7(x^2)} > \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Nerovnicu (19) budeme riešiť metódou racionalizácie. Najskôr ju upravíme do tvaru $\dfrac{f(a)-f(b)}{g(c)-g(d)} > 0$.

$$\frac{\log_7 \frac{4x-5}{|x-2|}}{\log_7(x^2)} - \frac{1}{2} > 0,$$

$$\frac{2\log_7 \frac{4x-5}{|x-2|} - \log_7(x^2)}{\log_7(x^2)} > 0,$$

$$\frac{\log_7 \left(\frac{4x-5}{|x-2|}\right)^2 - \log_7(x^2)}{\log_7(x^2) - \log_7 1} > 0. \tag{20}$$

Čo platí za predpokladu, že $\dfrac{4x-5}{|x-2|} > 0$.

Potom podľa (1) je nerovnica (20) ekvivalentná s nerovnicou

$$\frac{\frac{(4x-5)^2}{(x-2)^2} - x^2}{x^2-1} > 0. \tag{21}$$

Za predpokladu, že $x \neq 1$, $\dfrac{4x-5}{|x-2|} > 0$ a $x^2 > 0$. Nerovnicu (21) upravíme nasledujúcim spôsobom:

$$\frac{(4x-5)^2 - x^2(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2-1)} > 0,$$

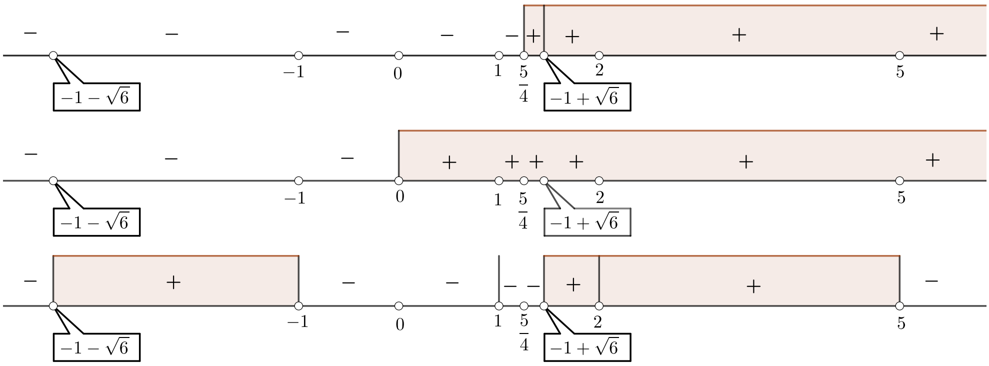
$$\frac{\big(4x-5-x(x-2)\big)\big(4x-5+x(x-2)\big)}{(x-2)^2(x^2-1)} > 0,$$

$$\frac{(6x-5-x^2)(x^2+2x-5)}{(x-2)^2(x^2-1)} > 0.$$

Tým sme previedli nerovnicu (18) na nasledujúcu sústavu nerovníc:

$$\begin{cases} \dfrac{4x-5}{|x-2|} > 0, \qquad \Leftrightarrow \qquad (4x-5)(x-2)^2 > 0, \\ x^2 > 0, \\ \dfrac{(6x-5-x^2)(x^2+2x-5)}{(x-2)^2(x^2-1)} > 0. \end{cases} \tag{22}$$

Sústavu racionálnych nerovníc (22) môžeme riešiť podobným spôsobom, ako v predchádzajúcej úlohe.



Obrázok 4.

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (18) je množina

$$P = (-1+\sqrt{6}; 2) \cup (2; 5).$$

Úloha 5. Riešme nerovnicu (pozri [4])

$$\log_x(x-7) + \log_x(x-1) < \log_x(x^3 - 6x^2 + 14x - 7). \tag{23}$$

Riešenie. Definičný obor nerovnice (23) je určený sústavou nerovníc:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x - 7 > 0, \\ x - 1 > 0, \\ x^3 - 6x^2 + 14x - 7 > 0, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x > 7, \\ x^3 - 6x^2 + 14x - 7 > 0. \end{cases} \tag{24}$$

Nerovnicu $x^3 - 6x^2 + 14x - 7 > 0$ môžeme riešiť samostatne, v súčasnosti sa to však na stredných školách neučí (pozri napr. [1]). Jej oborom pravdivosti je interval (x_0, ∞), kde

$$x_0 = 2 + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2121} - 45}{18}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2121} + 45}{18}} \approx 0.671\,731\,144\,331\,391\,609\,080\,984.$$

V skutočnosti to k vyriešeniu sústavy (24) nepotrebujeme. K tomu stačí ukázať, že funkcia $f(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 7$ je rastúca. Pretože[5] $f(x) = (x-2)^3 + (2x+1)$,

[5] Pretože $(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$, číslo a zvolíme tak, aby $3a = 6$, t.j. $a = 2$.

ide o súčet dvoch rastúcich funkcií, teda funkcia f je rastúca. Z toho vyplýva, že pre každé $x > 7$ platí $f(x) > f(7) = 140 > 0$. Preto pre každé $x > 7$ platí $x^3 - 6x^2 + 14x - 7 > 0$. Tým sme ukázali, že sústava (24) je ekvivalentná s nerovnicou $x > 7$. Teda definičným oborom nerovnice (23) je interval $(7; \infty)$.

Nerovnicu (23) budeme riešiť metódou racionalizácie, podobne ako v predchádzajúcich úlohách. Pre $x > 7$ sú nasledujúce úpravy ekvivalentné:

$$\begin{aligned} \log_x(x-7) + \log_x(x-1) - \log_x(x^3 - 6x^2 + 14x - 7) &< 0, \\ \log_x\big((x-7)(x-1)\big) - \log_x(x^3 - 6x^2 + 14x - 7) &< 0, \\ \frac{\log_5(x^2 - 8x + 7) - \log_5(x^3 - 6x^2 + 14x - 7)}{\log_5 x - \log_5 1} &< 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Potom podľa (1) upravíme nerovnicu (25) do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 - 8x + 7) - (x^3 - 6x^2 + 14x - 7)}{x - 1} &< 0, \\ \frac{x^3 - 7x^2 + 22x - 14}{x - 1} &> 0. \end{aligned}$$

Za predpokladu, že $x > 7$.

Ďalej postupujeme podobne, ako pri definičnom obore nerovnice (23). Ukážeme, že pre každé $x > 7$ platí $x^3 - 7x^2 + 22x - 14 > 0$. K tomu stačí ukázať, že funkcia $g(x) = x^3 - 7x^2 + 22x - 14$ je rastúca. Pretože $g(x) = \left(x - \frac{7}{3}\right)^3 + \left(\frac{17}{3}x - \frac{35}{27}\right)$, ide o súčet dvoch rastúcich funkcií, teda funkcia g je rastúca. Z toho vyplýva, že pre každé $x > 7$ platí $g(x) > g(7) = 140 > 0$. Tým sme ukázali, že nerovnica (23) je ekvivalentná s nerovnicou $x > 7$.

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (23) je interval $I = (7; \infty)$.

Čitateľom, ktorí si chcú prehĺbiť svoje poznatky o riešení nerovníc, odporúčame sériu článkov [8]. Tieto vyšli v roku 2015 v metodickom časopise pre učiteľov matematiky a sú dostupné na internete.

Literatúra – References

[1] Doboš, J.: Poznámka o kubických rovniciach, Obzory matematiky, fyziky a informatiky, 41 (2), 2012, 1 – 5.

[2] Дорофеев, Г. В.: *Обобщение метода интервалов*, Математика в школе, 1969, №3, 39 – 44.

[3] Яковлев, И. В.: Уравнения и неравенства, метод рационализации, решение логарифмических неравенств. `https://mathus.ru/math/ratiometod.pdf`

[4] Корянов, А. Г., Прокофьев, А. А.: Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников, Лекции 1 – 4, Москва, Педагогический университет «Первое сентября», 2012.

[5] Lial, M. L., Hornsby, J., McGinnis, T.: Beginning and Intermediate Algebra, Pearson Education, Inc., 2020.

[6] Miller, J., O'Neill, M., Hyde, N.: Intermediate Algebra, McGraw-Hill Companies, Inc., 2018.

[7] Peller, F., Šáner, V., Eliáš, J., Pinda, Ľ.: Matematika krok za krokom na EU, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava, 2002.

[8] Шестаков, С.: *Решаем неравенства*, Математика. Первое сентября. Методический журнал для учителей математики, 2015, №1 январь, 52 – 60; №2 февраль, 56 – 60; №3 март, 53 – 60; №4 апрель, 53 – 60; №5-6 май–июнь, 54 – 60; №7-8 июль–август, 54 – 59; №9 сентябрь, 54 – 62; №10 октябрь, 56 – 60; №11 ноябрь, 56 – 62.

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/0265/17 *Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky*.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2021 (50)

Alfred North Whitehead – duchovný rozmer intelektu

Dušan Jedinák

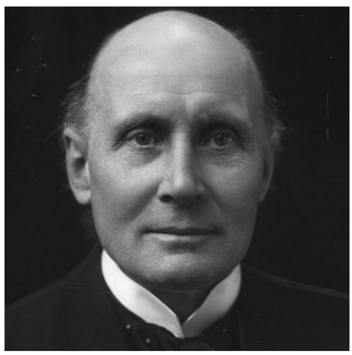
Abstract [Alfred North Whitehead - the spiritual dimension of the intellect]: A brief note on the life and work of an important mathematician and logician

Key words: Whitehead, mathematician, philosopher

Súhrn: Stručné upozornenie na život a dielo významného matematika a logika

Kľúčové slová: Whitehead, matematik, filozof

MESC: A30, A50



Alfred North Whitehead
15. 2. 1861 – 30. 12. 1947

Základnými konkrétnymi entitami nie sú trvalé substancie, ale udalosti spojené svojimi priestoročasovými vzťahmi, ktoré vykazujú svoje kvalitatívne a matematické štruktúry. Svet je proces, v základoch ktorého je zmena, dianie, udalosti. Zmena neznamená vždy chaos, ale môže stelesňovať i poriadok, systém, organizáciu. Skutočnosť je ako tvorivý proces, ako organizmus, ktorý sa ustavične rozvíja, ktorý je v nepretržitej činnosti. *Ani fyzikálnu prírodu, ani život nemožno pochopiť bez toho, aby sme ich nespojili dohromady ako podstatné faktory v skladbe „skutočne reálnych" vecí, ktorých vzájomné súvislosti a individuálne povahy tvoria svet*. Organizácia je možná len tam, kde sú uznávané trvalé hodnoty. *Každý konečný zmysel existuje len ako smerovanie k hodnote, ako vnútorné dozrievanie hodnoty.* Zachovanie poriadku v systéme zmien a zachovanie zmien v podstate systému je večným princípom udržania dynamickej rovnováhy.

Život filozofa

Anglický filozof, matematik a logik Alfred North Whitehead pochopil filozofiu ako pokus vyjadriť nekonečnosť vesmíru ohraničenými prostriedkami jazyka. Rozpracoval filozofický systém na predstave organizmu. Za hybnú silu vývoja považoval kozmickú emocionálnu energiu, ktorá v sebe zahrňuje všetky formy energie zároveň s ich účelom a zmyslom pre neustály tvorivý vývoj. Pokúsil sa opísať metafyzický systém, kde chápal prírodné i duchovné zmeny ako proces organizácie. Jeho organizmická filozofia za základné pojmy, ktoré sa odhaľujú vo vedeckom výskume, považuje aktivitu a proces. Príroda je scénou pre vzájomné vzťahy aktivít. Svoje rôznorodé názory vyložil hlavne v dielach *O matematickom ponímaní materiálneho sveta* (1906), *Pojem prírody* (1920), *Veda a moderný svet* (1925), *Proces a realita* (1929), *Dobrodružstvá ideí* (1933), *Modality myslenia* (1938) a *Príroda a život* (1944). Odkázal nám: „*Umenie pokroku spočíva v zachovaní poriadku uprostred zmien a v zachovaní zmien uprostred poriadku… Každá schéma analýzy prírody sa musí vyrovnať s dvoma skutočnosťami: so zmenou a pretrvávaním.*“

Dielo logika i matematika

Jeho prvou a poslednou láskou bola a zostala symbolická logika. Po štúdiu v Trinity College (Cambridge) tam zostal aj prednášať. Vydal *Rozpravu o univerzálnej algebre* (1906), *Axiómy projektívnej geometrie* (1906), *Úvod do matematiky* (1911). S Bertrandom Russellom (1872 – 1970) vydal trojzväzkové *Principia Mathematica* (1910 – 1913), základné dielo symbolickej logiky. Zámerom bolo naznačiť všeobecnú aplikáciu matematickej logiky na oblasť geometrie a fyziky.

Whitehead chápal matematiku ako najoriginálnejší výtvor ľudského ducha, ako vedu o najzložitejších abstrakciách, k akým môže ľudský um dospieť. *Matematika je myslenie pohybujúce sa vo sfére úplného abstrahovania od každého jednotlivého prípadu toho, o čom práve vypovedá. Pokiaľ sa zaoberáme čistou matematikou, sme v ríši úplnej absolútnej abstrakcie… Najväčšie abstrakcie sú tými pravými nástrojmi, ktorými kontrolujeme svoje uvažovanie o konkrétnych faktoch… Originalita matematiky spočíva v tom, že v matematickej vede sú vyjadrené vzťahy medzi vecami, ktoré sa bez sprostredkovania ľudským rozumom nedajú vôbec postihnúť.* Nebál sa pripustiť, že matematické bádanie je božské bláznovstvo ľudského ducha, únik od dotieravej nástojčivosti náhodných udalostí. Vedel, že intelektuálna mohutnosť matematiky závisí od jej úplnej abstraktnej všeobecnosti. Uznal aj to, že nemôžeme mať nijakú apriórnu istotu o pravdivosti svojho presvedčenia, že entity pozorované v reálnom svete sú zvláštnym prípadom toho, čo zahŕňa naše všeobecné uvažovanie. Napriek tomu, ako zásadne ocenil zmysel i význam matematických vied, Whitehead priznal: „*Vzhľadom k nesmiernosti svojej látky je matematika (i moderná matematika) vedou v plienkach. Ak sa civilizácia bude ďalej rozvíjať, potom v budúcich dvoch tisícročiach bude najväčšou novinkou v ľudskom myslení nadvláda matematického rozumu.*“

Na hrane rozumu a viery

Boh je sila, ktorá z mnohých možností vyberá skutočnosť. Boh v jeho poňatí je princíp poriadku. Boh určuje vzťahy medzi večnými objektmi. Určuje, kedy ktorý večný objekt bude konkretizovaný. Vedie svet ako organizmus smerom k pravde, kráse a dobru. Whitehead vytrvalo hľadal hlboké súvislosti medzi vedou, moderným svetom i náboženstvom. *Veda je podnikanie, v ktorom sa rozum opiera o vieru.* Napísal práce *Náboženstvo vo vývoji* (1926) a *Funkcia rozumu* (1929). Spoznal, že nové idey nemožno vyjadriť starými pojmami. Jeho prírodovedným presvedčením bolo: „*Hlásaj jednoduchosť, ale nedôveruj jej. Ale aj tak prehlásil: Vo veku rozumu nemôže existovať aktívny záujem, ktorý by odsunul nabok všetku nádej na víziu harmónie pravdy. Uspokojiť sa s rozporom znamená narušiť úprimnosť a morálnu čistotu. Patrí k sebaúcte intelektu, aby sledoval každé zauzlenie v myslení až do konečného rozuzlenia.*“ Uznával, že konflikt medzi náboženstvom a vedou existoval odjakživa a napriek tomu, či možno práve preto, sa jedno i druhé bez prerušenia rozvíjali – modifikovali. Podivné spolužitie vedeckého pokroku a náboženského myslenia ukázalo, že existujú obsiahlejšie pravdy a jemnejšie perspektívy, v rámci ktorých možno nájsť zmierenie hlbšieho náboženstva a jemnejšej vedy. Vedu možno chápať ako štúdium všeobecných podmienok, ktoré skúmame s cieľom riadiť fyzikálne javy. Náboženstvo je výrazom jedného typu základnej skúsenosti ľudstva, je reakciou ľudskej povahy na jej hľadanie Boha. Whitehead pozorne vysvetlil svoju predstavu o podstatnej vlastnosti náboženského ducha. *Náboženstvo je víziou čohosi, čo sa nachádza mimo, za a uprostred pominuteľného toku bezprostredných vecí: niečo, čo je reálne, no predsa čaká na svoje uskutočnenie, čosi, čo je vzdialenou možnosťou, a predsa je najvýznamnejším z prítomných faktov: je to niečo, čo dáva zmysel všetkému pominuteľnému, a predsa uniká uchopeniu, niečo, čoho vlastníctvo predstavuje najvyššie dobro, a predsa je mimo dosahu, niečo, čo je najvyšším ideálom, a zároveň beznádejným hľadaním.* Sila rozumu i nádej lásky sú dobrodružstvom ducha túžiaceho po harmonickom usporiadaní zložitých detailov, po najvyššom ohraničení, po autorovi hry, ktorý oddeľuje dobré od zlého. Zrážka doktrín nie je katastrofou, je príležitosťou. Našou úlohou je hľadať pravdu v jej najhlbšej hĺbke.

Hodnota mravnosti

Uvedomoval si dôležitosť pozadia zdravého rozumu, v ktorom je zahrnutý náš vzťah k nekonečnosti univerza. Nestrácal zo zreteľa svet hodnôt, vnímal život ako vnútorné dozrievanie hodnoty. Vedel, že ľudské bytosti potrebujú niečo, čo im pretvára dušu na trvalú realizáciu hodnôt. Každá ľudská bytosť je zložitejšia než akýkoľvek sociálny systém, ku ktorému patrí. Díval sa na ľudské snaženia aj priezorom mravným: „*Morálna stránka nazerania je neoddeliteľne spojená so všeobecnosťou nazerania. Protirečenie medzi všeobecným dobrom a individuálnym záujmom možno odstrániť iba vtedy, keď záujmom indivídua je všeobecné dobro.*“

Tvorivá aktivita ducha

Civilizácia postupuje tým, že rozširuje počet dôležitých operácií, ktoré môžeme vykonať bez toho, aby sme na ne museli myslieť. Whitehead, výrazná a originálna postava filozofie a matematickej logiky, pochopil svet ako skúsenosť Boha a prírodu vnímal ako symbol transcendentných skutočností. *Objavovať základy vedy je ťažšie ako ju rozvíjať.* Hmotu stotožnil s energiou a energiu s čírou aktivitou. Prírodu vnímal ako scénu pre vzájomné vzťahy aktivít. Za charakteristické znaky života považoval úplné sebaprežívanie, tvorivú aktivitu a cieľ. V podstate života odhalil vnútorné dozrievanie hodnôt. Celá existencia je aktivita, večne sa vnárajúca do budúcnosti.

Vybrané odkazy

- Myslenie je jednou formou zdôrazňovania… Matematika je štúdiom vzorov… Matematika je veda o najzložitejších abstrakciách, k akým môže ľudský um dospieť.
- Nič nie je pôsobivejšie ako fakt, že tou mierou, ako matematika postupne prechádzala do vyšších oblastí čoraz abstraktnejšieho myslenia, vracala sa späť na zem, nadobúdajúc čoraz väčší význam pre analýzu konkrétneho faktu.
- Pytagoras objavil význam používania abstrakcií a osobitne zameral pozornosť na číslo ako to, čo charakterizuje periodicitu hudobných tónov. Význam abstraktnej idey periodicity bol teda prítomný už pri samých začiatkoch matematiky.
- Všeobecnosť matematiky je najúplnejšou všeobecnosťou, zhodnou so spoločenstvom udalostí, ktoré konštituuje našu metafyzickú situáciu.
- Aká je funkcia čistej matematiky v myslení? Je to rozhodný pokus prejsť celú cestu smerom k úplnej analýze, aby sa oddelili prvky samých vecí od číro abstraktných podmienok, ktoré spríkladňujú.

L i t e r a t ú r a – R e f e r e n c e s

[1] Whitehead, A., N.: *Dobrodružství idejí*, Praha, 2000, Oikúmené.
[2] Whitehead, A., N.: *Matematika a dobro a jiné eseje*, Praha, 1970, Mladá fronta.
[3] Whitehead, A., N.: *Symbolismus*, Praha,1998, Panglos.
[4] Whitehead, A., N.: *Veda a moderný svet*, Bratislava, 1989, Pravda.

Adresa autora:

Tribečská 2136, 955 01 Topolčany
e-mail: `kanidej1944@gmail.com`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2021 (50)

Hrozny problémů ve školské matematice (2. část)

Jan Kopka

Abstract [Clusters of Problems in School Mathematics]: In the first part we described a teaching method called "The Creation of Clusters of Problems" and gave two school examples. We now give another example and also show two examples of so called isolated problems, which are often overly difficult in school mathematics.

Key words: Problem, isolated problem, cluster of problems, signs of divisibility

Souhrn: V první části jsme popsali metodu „Tvoření hroznů problémů" a uvedli dva školské příklady. Nyní uvedeme další příklad. Ukážeme i dva příklady tzv. izolovaných problémů, které často dělají školskou matematiku obtížnou.

Klíčová slova: Problém, izolovaný problém, hrozen problémů, znaky dělitelnosti
MESC: A30, A40, B20

Hrozen 3: Znaky dělitelnosti [1]

Umět rychle poznat, zda je dané víceciferné číslo dělitelné některým jednociferným číslem, popřípadě jaký dává při dělení tímto číslem zbytek, může být mnohdy užitečné, zvláště, když nemáme po ruce kalkulačku.

Matematický rámec: Vzhledem k úvahám, které budeme dále provádět, je potřeba, aby žáci znali:

1. Jestliže je n-ciferné číslo a v desítkové soustavě zapsané ve tvaru $a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0$, pak to znamená, že
$$a = a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \cdots + a_1 10 + a_0.$$
2. Jestliže je přirozené číslo a zapsané ve tvaru součtu $b + c$ a číslo b je dělitelné číslem x, pak číslo a dává při dělení číslem x týž zbytek, jaký dává číslo c při dělení číslem x. Zdůvodnění uvedeného tvrzení je velmi jednoduché. Číslo b, které

[1] Tento hrozen je uveden v knížkách [6], [8].

je dělitelné číslem x, můžeme zapsat kx, kde k je přirozené číslo. Pak

$$a = b + c = kx + c,$$

$$kx = a - c.$$

Z tohoto zápisu je vidět, že číslo $a - c$ je dělitelné číslem x, a proto musí čísla a, c dávat při dělení číslem x stejný zbytek.

Příklad
$9\,314 = 9\,300 + 14$, přičemž číslo $9\,300$ je dělitelné číslem 3. Budeme-li číslem 3 dělit čísla $9\,314$ a 14, dostaneme v obou případech zbytek 2. Číslo $9\,300$ je také dělitelné např. číslem 5. Budeme-li číslem 5 dělit čísla $9\,314$ a 14 dostaneme v obou případech zbytek 4.

Motivace: Učitel zadá žákům např. tento příklad: Můžeš říci, jaký zbytek dostaneme, budeme-li dělit číslo $4\,727$ číslem 4?

Dělence i dělitele můžeme později měnit. Dělitele však budeme volit vždy tak, aby to bylo některé z čísel $3, 4, 5, \ldots, 12$. Pokud některé z příkladů zadávají žáci sami, je to jen ve prospěch věci. Důležité ovšem je, že učitel, ač nepoužívá kalkulačku, je vždy rychlejší než žáci, kteří kalkulačku používat mohou. Po několika příkladech se učitel zeptá:*„Chcete tyto příklady umět také tak rychle spočítat?“*[2]

Problém 9
Jak určíte zbytek při dělení určitého trojciferného čísla a číslem 4 (aniž byste prováděli dělení zadaného čísla a)?

Řešení. Nejprve si trojciferné číslo a zapíšeme ve tvaru $a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$, kde $a_2 \neq 0$. Nyní rozložíme číslo a na součet dvou čísel, z nichž jedno je dělitelné číslem 4. Může to být např. takto:

$$a = (a_2 10^2) + (a_1 10 + a_0).$$

Protože je číslo 100 dělitelné číslem 4, je celý výraz v první závorce dělitelný číslem 4. Proto dává trojciferné číslo a při dělení číslem 4 týž zbytek, jaký dává dvojciferné číslo zapsané v druhé závorce.

Odpověď: Trojciferné číslo $a_2 a_1 a_0$ dává při dělení číslem 4 týž zbytek jako číslo $a_1 a_0$ při dělení číslem 4.

[2]Takovouto motivaci používal při výuce této problematiky na učilišti doc. RNDr. Dušan Šveda, CSc., z Přírodovědecké fakulty UPJŠ v Košicích a byla vždy velmi účinná.

Příklad
Čísla $721, 321$ a 921 dávají při dělení číslem 4 týž zbytek jako číslo 21, tzn. zbytek je 1. Čísla $684, 284$ a 384 jsou dělitelná číslem 4, protože číslo 84 dává při dělení číslem 4 zbytek 0.

Nyní můžeme výsledek získaný při řešení problému 9 zobecnit pro libovolné n-ciferné číslo. Aby mělo smysl tento výsledek v praxi používat, budeme předpokládat, že n je aspoň 3.

Problém 10 (zobecnění)
Jak určíte zbytek při dělení určitého alespoň trojciferného čísla a číslem 4 (aniž byste prováděli dělení čísla a)?

Řešení. Metoda řešení je stejná jako u předchozího příkladu, pouze rozklad čísla a bude tentokrát vypadat takto:

$$a = (a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2) + (a_1 10 + a_0).$$

Protože ze součtu v první závorce lze vytknout 100, je toto číslo dělitelné číslem 4. Proto dává číslo a při dělení číslem 4 týž zbytek jako číslo vyjádřené v druhé závorce.

Odpověď: n-ciferné číslo $a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0$ dává při dělení číslem 4 týž zbytek jako číslo a_1a_0 (při dělení číslem 4).

Příklad
Čísla $5\ 743, 2\ 343$ a $8\ 943$ dávají při dělení číslem 4 týž zbytek jako číslo 43, tj. zbytek 3.

Po obou právě vyřešených problémech si čtenář jistě uvědomil, jak jsme vedli „dělicí řez“ v zápise čísla a. Výše uvedené pravidlo jistě podstatně urychlí určování zbytku při dělení číslem 4, a to tím více, čím delší zápis dané číslo má. Zabývejme se dále dělitelností číslem 5.

Problém 11
Jak určíte zbytek při dělení určitého trojciferného čísla a číslem 5 (aniž byste prováděli dělení čísla a)?

Řešení. Vzhledem k dělitelnosti číslem 5 můžeme vytvořit např. následující rozklad čísla a:

$$a = (a_2 10^2 + a_1 10) + a_0.$$

Protože z první závorky je možné vytknout číslo 10 a číslo 10 je dělitelné číslem 5, je výraz v první závorce dělitelný číslem 5. Proto dostáváme odpověď:

Odpověď: Trojciferné číslo $a_2a_1a_0$ dává při dělení číslem 5 týž zbytek, jaký dává jednociferné číslo a_0 při dělení číslem 5.

Příklad
Čísla $487, 797, 547$ dávají při dělení číslem 5 týž zbytek, jaký dává číslo 7 při dělení číslem 5, tj. zbytek 2.

Problém 11 můžeme zobecnit. Dříve se však dohodněme, že při vyslovování dalších problémů již nebudeme zdůrazňovat, že metodou řešení těchto problémů nemá být dělení zadaného čísla.

Problém 12 (zobecnění)
Jak určíte zbytek při dělení určitého n-ciferného čísla a, kde $n \geq 2$, číslem 5?

Řešení. Metoda řešení je stejná jako u předchozích problémů 9 a 10, a proto vypíšeme pouze odpověď:

Odpověď: n-ciferné číslo $a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0$, kde $n \geq 2$, dává při dělení číslem 5 týž zbytek, jaký dává jednociferné číslo a_0 při dělení číslem 5.

Obdobně jako u problémů 11 a 12 by vypadala situace u dělitelnosti číslem 2.

Nyní přistoupíme k trochu složitějšímu problému. Budeme se zabývat dělitelností číslem 8.

Problém 13
Jak určíte zbytek při dělení určitého n-ciferného čísla a, kde $n > 3$, číslem 8?

Řešení. Řešení: Protože číslo 8 dělí číslo 1000, můžeme toto zjištění využít při rozkladu čísla a.

$$a = (a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \cdots + a_3 10^3) + (a_2 10^2 + a_1 10 + a_0).$$

Odpověď: n-ciferné číslo $a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0$ dává při dělení číslem 8 týž zbytek, jaký dává trojciferné číslo $a_2a_1a_0$ při dělení číslem 8.

Příklad
Čísla $32\ 041, 12\ 041$ a $2\ 347\ 041$ dávají při dělení číslem 8 týž zbytek, jaký dává číslo 41 při dělení 8, tj. zbytek 1.

Poznámka. Po vyřešení předchozích problémů se pro nás jistě stala situace natolik známá, že nyní můžeme pouze ukázat, jak tvořit pravidla odpovídající doposud použitým rozkladům zadaného čísla a.

Pomocí rozkladu $a = A.10 + a_0$ můžeme odvodit pravidla pro určení zbytků při dělení alespoň dvojciferného čísla a čísly $2, 5$ a 10.

Pomocí rozkladu $a = A.100 + (a_1 10 + a_0)$ můžeme odvodit pravidla pro určení zbytků při dělení alespoň trojciferného čísla a čísly $4, 20, 25, 50$ a 100.

Pomocí rozkladu $a = A.1000 + (a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)$ můžeme odvodit pravidla pro určení zbytků při dělení alespoň čtyřciferného čísla a čísly $8, 40, 125, 200$ a 500.

Chceme-li zkoumat dělitelnost čísla a např. čísly 3 a 9, pak musíme příslušný rozklad čísla a vytvořit trochu jinak. Musíme se pokusit vhodně rozložit mocniny čísla 10.

Problém 14
Jak určíte zbytek při dělení určitého trojciferného čísla a číslem 9?

Řešení. Nyní bude třeba vymyslet rozklad čísla a trochu rafinovaněji než při řešení předchozích problémů. Protože žádná z mocnin čísla 10 není dělitelná číslem 9, budeme muset tyto mocniny vhodně rozložit. Rozklad může vypadat např. takto:

$$a = a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = a_2(99+1) + a_1(9+1) + a_0 = (a_2 99 + a_1 9) + (a_2 + a_1 + a_0).$$

Protože číslo v první závorce je dělitelné číslem 9, dává číslo a při dělení číslem 9 týž zbytek jako číslo zapsané v druhé závorce. Číslu v druhé závorce se říká *ciferný součet* čísla a.

Odpověď: Trojciferné číslo $a_2 a_1 a_0$ dává při dělení číslem 9 týž zbytek, jaký dává jeho ciferný součet, tj. číslo $a_2 + a_1 + a_0$, při dělení číslem 9.

Problém 15 (zobecnění)
Jak určíte zbytek při dělení určitého n-ciferného čísla a, kde $n \geq 2$, číslem 9?

Řešení. Protože už víme, jak rozložit zadané n-ciferné číslo a (viz řešení problému 14), napíšeme rovnou odpověď:

Odpověď: n-ciferné číslo a dává při dělení číslem 9 týž zbytek, jaký dává jeho ciferný součet při dělení číslem 9.

Příklad
Číslo $3\,654$ má ciferný součet 18, a proto je toto číslo dělitelné číslem 9. Číslo 285 má ciferný součet 15, a proto dává při dělení číslem 9 zbytek 6.

Rozklad čísla a při určování dělitelnosti číslem 3 může být stejný jako při určování dělitelnosti číslem 9, a proto problém vyslovíme hned pro n-ciferné číslo.

Problém 16
Jak určíte zbytek při dělení určitého n-ciferného čísla a, kde $n \geq 2$, číslem 3?

Odpověď: n-ciferné číslo a dává při dělení číslem 3 týž zbytek, jaký dává jeho ciferný součet při dělení číslem 3.

Způsob rozkladu, který jsme používali při určení dělitelnosti číslem 9 a 3, nám v trochu upravené formě pomůže řešit problematiku dělitelnosti číslem 11.

Problém 17
Jak určíte zbytek při dělení určitého pěticiferného čísla a číslem 11?

Řešení. Rozklad čísla a nyní může vypadat takto:

$$a = a_4 10^4 + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 =$$

$$= a_4(9999 + 1) + a_3(990 + 10) + a_2(99 + 1) + a_1 10 + a_0 =$$

$$= (a_4 9\,999 + a_3 990 + a_2 99) + (a_4 + a_3 10 + a_2 + a_1 10 + a_0).$$

Odpověď: Pěticiferné číslo a dává při dělení číslem 11 týž zbytek, jaký dává číslo zapsané v druhé závorce (uvedeného rozkladu), tj. číslo $a_4 + a_3.10 + a_2 + a_1.10 + a_0$.

Příklad
Číslo 21 043 dává při dělení číslem 11 týž zbytek, jaký dává číslo

$$2 + 1.10 + 0 + 4.10 + 3 = 55$$

při dělení 11, tj. zbytek 0. Číslo 21 043 je proto dělitelné číslem 11.

Předchozí problém můžeme zobecnit pro libovolné n-ciferné číslo a, kde $n > 2$. Toto zobecnění již přenecháme čtenáři.

Prozatím jsme využili dva druhy rozkladů zadaného čísla. Byl to rozklad „vertikální“ a rozklad mocnin čísla 10. Nyní ukážeme, že tyto dva druhy rozkladů lze vhodně zkombinovat.

Pravidlo pro dělitelnost číslem 4 jsme nalezli již při řešení problémů 9 a 10. Ukažme, že je možné nalézt pro toto číslo ještě jiné použitelné pravidlo. To samozřejmě vyžaduje nalezení nějakého dalšího vhodného rozkladu zápisu uvažovaného čísla a.

Problém 18
Jak určíte zbytek při dělení určitého alespoň dvojciferného čísla a číslem 4?

Řešení. V problémech 9 a 10 jsme využili toho, že 4 dělí 10^2. Nyní použijeme ještě skutečnost, že $10 = 2.4 + 2$. Rozklad čísla a proto může vypadat takto:

$$a = (a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 8) + (2a_1 + a_0).$$

Protože číslo v první závorce je dělitelné číslem 4, můžeme vyslovit tuto odpověď:

Odpověď: Alespoň dvojciferné číslo $a = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0$ dává při dělení číslem 4 týž zbytek jako číslo $2a_1 + a_0$.

Pokusme se zjistit ještě některá další pravidla pro dělitelnost, která se obvykle neuvádějí. I když jejich použití může být vzhledem k relativní složitosti diskutabilní, jsou z matematického hlediska docela zajímavá. K vytvoření těchto pravidel budeme potřebovat nejen kombinaci obou výše používaných druhů rozkladů, ale ještě trochu důvtipu navíc. Pokusíme se zjistit pravidlo pro dělitelnost prvočíslem 13.

Problém 19
Jak určíte zbytek při dělení určitého alespoň čtyřciferného čísla a číslem 13?

Řešení. Číslo a můžeme rozložit nejprve „vertikálně“ $a = A.10^3 + B$. Nyní se pokusíme vyjádřit 10^3 pomocí nejbližšího násobku čísla 13. Protože $1\,001 = 77.13$, můžeme psát $a = A(77.13 - 1) + B$ a odtud vyplývá $a = A.77.13 + (B - A)$.

Odpověď: Alespoň čtyřciferné číslo $a = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0$ dává při dělení číslem 13 týž zbytek jako číslo $B - A$ při dělení 13, přičemž číslo $A = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_3$ a číslo $B = a_2a_1a_0$.

Zajímavé je toto: Protože je $77 = 7.11$, odvodili jsme současně navíc ještě dvě další pravidla, totiž pravidlo pro dělitelnost číslem 11 (již druhé) a pravidlo pro dělitelnost číslem 7. Jejich formulace může být následující:

Alespoň čtyřciferné číslo $a = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0$ dává při dělení čísly 13 nebo 11 nebo 7 týž zbytek jako číslo $B-A$ při dělení číslem 13 nebo 11 nebo 7, přičemž číslo $A = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_3$ a číslo $B = a_2a_1a_0$.

Příklad
Budeme-li uvažovat například číslo $a = 257\,348$, pak číslo $A = 257$ a číslo $B = 348$. Rozdíl $B - A = 348 - 257 = 91$. Dělíme-li číslo 91 postupně čísly $13, 11$ a 7, dostaneme po řadě zbytky $0, 3$ a 0. Proto je zadané číslo $257\,348$ dělitelné čísly 7 a 13 a při dělení číslem 11 dává zbytek 3.

V předchozí části si čtenář jistě uvědomil, že pro každé přirozené číslo a můžeme vytvářet pravidla dělitelnosti tímto číslem. Jde vždy pouze o to vytvořit vhodný rozklad děleného čísla a. V mnoha případech však pravidla budou natolik složitá, že není výhodné je používat.

Jistě bylo patrné, že při řešení problémů našeho hroznu jsme postupně použili tři druhy rozkladů zápisu děleného čísla a:

- rozklad vertikální (např. dělitelnost číslem 4),
- rozklad mocnin čísla 10 (např. dělitelnost číslem 9),
- rozklad kombinovaný (např. druhé pravidlo pro dělitelnost číslem 4).

Pokud je čtenář obeznámen s vyjadřováním čísel v jiných číselných soustavách, může si analogicky začít vytvářet hrozny pravidel o dělitelnosti v každé z těchto soustav. Zjistí, že mnohé z toho, co objevil při vyjadřování čísel v desítkové soustavě, se dá přenést i do soustav o jiných základech.

Např. pravidlo o dělitelnosti číslem z–1 v soustavě o základu z může znít obdobně jako pravidlo o dělitelnosti číslem 9 v soustavě desítkové (viz řešení problémů 14 a 15, v nichž se hovoří o ciferném součtu děleného čísla).

První problémy tohoto hroznu lze s úspěchem řešit už na druhém stupni, některé další problémy (např. 19) by bylo vhodné přenechat až na třetí stupeň. Vytvářený hrozen nemusí být nijak rozsáhlý. I hrozen o několika málo problémech umožňuje využití metody řešení základního problému a může při tom ukázat, jak lze vytvářet další problémy.

Poznámka. [o velikosti hroznu.] Hrozen bychom měli rozvíjet tak dlouho, dokud studenti projevují zájem. Pokud zájem opadne, měli bychom s vytvářením dalších problémů skončit nebo alespoň na čas rozšiřování hroznu přerušit. Po určité době (druhý den, za týden, za měsíc nebo i delší dobu) se k problematice můžeme vrátit. Vždy, než hrozen opustíme, by však studenti měli mít pocit, že se něco zajímavého dověděli. Pokud později práci na daném hroznu obnovíme, musíme nejprve zopakovat vše, k čemu jsme již dříve dospěli.

Řadu dalších hroznů najde čtenář v knížkách [5], [6] nebo [8].

Závěrečné poznámky o metodě vytváření hroznů problémů

Metoda vytváření hroznů problémů může být jednou z pracovních metod používaných ve školské matematice. Nejprve by jí měl dobře zvládnout učitel, a potom by ji mohl na vhodných místech začít používat se svými studenty. Praxe ukazuje, že se tato metoda dá použít téměř všude. V centru veškerého dění stojí stále učitel, a to především při tvorbě nových problémů a také při jejich řešení. Měl by si však počínat tak, aby každý student (i ten slabý) měl čas od času pocit, že na něco přišel sám.

Ne každý problém je vhodný pro to, aby hrál roli základního problému. Zkušenosti a znalosti, které studenti získají pomocí tohoto problému, by měly tvořit základ pro práci s dalšími nově vytvářenými problémy. Učitel musí rozhodnout, který problém bude pro danou oblast základní. Metoda řešení základního problému nesmí být ani příliš těžká, ani příliš lehká. Navíc student musí mít dostatek času, aby tuto metodu „vstřebal" dříve, než přistoupíme k práci s dalšími problémy.

Velmi důležitou je otázka: Kdo vytváří problémy ve druhé fázi? Naše zkušenosti ukazují, že je to téměř výhradně učitel. A přitom by bylo žádoucí, aby některé z problémů tvořili studenti. Protože však na to nejsou z „normálně dělané" školské matematiky zvyklí, musíme je k tomu dlouhodobě vést. Ukazuje se, že studenti podstatně mění svůj vztah k matematice, pokud mohou být při pronikání do ní dostatečně aktivní a pokud jim při tom pomáháme „tak akorát".

Vytváření hroznů je dobrá cesta v boji proti tzv. *izolovaným problémům*. To jsou takové, které nemají vztah k žádnému problému, který jsme již řešili (ani k žádnému, který později budeme řešit). Začněme dvěma konkrétními příklady. První problém (viz článek [3]) je vypůjčen z matematické olympiády v Norsku. Tato soutěž samozřejmě nese v názvu jméno největšího norského matematika. Je to Abelova soutěž.

Problém 20

Nechť a, b, c jsou tři reálná čísla, pro která platí:

$$a + b + c = 0, \tag{1}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1. \tag{2}$$

Určete hodnotu výrazu $a^4 + b^4 + c^4$.

Řešení. [stručně] Umocněním podmínky (2) dostaneme formuli (3). Výraz v závorce formule (3) můžeme spočítat z podmínky (1) dvojím umocněním.

$$\begin{aligned}
(a^2 + b^2 + c^2)^2 &= 1^2, \\
a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) &= 1, \qquad (3) \\
(a + b + c)^2 &= 0^2, \\
a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) &= 0, \\
ab + ac + bc &= -\tfrac{1}{2}, \\
(ab + ac + bc)^2 &= \tfrac{1}{4}, \\
a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c) &= \tfrac{1}{4}, \\
a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 &= \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Jestliže dosadíme tento výsledek do formule (3), dostaneme:

$$a^4 + b^4 + c^4 = 1 - 2 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}.$$

Poznámka. Protože ve škole neřešíme podobné problémy, můžeme tento problém považovat za izolovaný. Přesto bychom ho mohli ve školské matematice využít, a to např. k procvičování umocňování a upravování algebraických výrazů. V tomto případě by bylo především na učiteli, aby určoval strategii řešení a studenti by prováděli vlastní úpravy. Problém by tak tvořil pouze zajímavý rámec procvičování.

Jiným takovým izolovaným problémem by zřejmě byl problém: Dokažte, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo. Dal by se samozřejmě využít k ukázce důkazu sporem nebo jako motivace před probíráním reálných čísel.

Vztahem izolovanosti však většinou nevyjadřujeme vztah problému k dané teorii, ale spíše vztah k ostatním ve škole řešeným problémům. Problém bychom mohli nazvat *izolovaným* pro určitého studenta, jestliže tento student nezná další problémy, které umí řešit a které by mu mohly pomoci vyřešit uvažovaný problém. To, zda je určitý problém izolovaný nebo ne, je otázka zásadní důležitosti. Vždyť když máme řešit určitý problém, pak se v první řadě snažíme využít dříve vyřešené problémy, které se k tomuto problému vztahují. Přitom můžeme použít především

- jejich metody řešení,
- jejich výsledky
- a zkušenosti, které jsme při jejich řešení získali.

Poznámka. Lze říci, že obtížnost řešení mnohých problémů je ve škole úzce svázána s jejich izolovaností. Také vzhledem k rozvoji schopností žáků a studentů řešit problémy bychom se měli snažit, aby se izolovaných problémů ve školské praxi vyskytovalo co nejméně. Při vyslovení tohoto požadavku máme na mysli především průměrné a slabší studenty. S těmi nejlepšími studenty (to jsou ti, kterým to v hodinách matematiky opravdu dobře myslí) je to trochu jinak. Jim bychom naopak měli občas zadávat k řešení i různé izolované problémy, což je většina problémů různých matematických soutěží.

Vytváření hroznů problémů je metoda umožňující systematicky se zbavovat izolovaných problémů. Navíc se při vytváření těchto hroznů ukáže, že metody řešení problémů jsou obvykle mnohem cennější než vlastní výsledky, k nimž pomocí nich dospíváme.

Zakončeme opět citátem z Polyovy knížky *How to solve it*:

> *Matematické zkušenosti studenta nejsou úplné, pokud nikdy neměl možnost řešit problém který si sám vymyslel.*

Literatura – References

[1] Cofman, J.: *What to Solve?* New York, Oxford Univerzity Press, 1990.
[2] Frobisher, L. and writing team: *Maths Investigation*. Oxford, Heinemann, 2003.
[3] Kopka, J.: *Isolated and Nonisolated Problems*. In: Teaching of Mathematics, Oxford, Oxford University Press, 1992.
[4] Kopka, J.: *New Approachs to Problems and Investigation in School Mathematics*. In: Selected Topics from Mathematical Education, Department of Teacher Education University of Oslo, 1996.
[5] Kopka, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad Labem, Acta universitatis Purkynianae 40, 1999.
[6] Kopka, J.: *Ako riešiť matematické problémy*. Ružomberok, VERBUM, 2010.
[7] Kopka, J., Feissner, G.: *How to Penetrate into Mathematics Actively*. In:Matematyka VIII. Czestochowa, WSP.
[8] Kopka ,J.: *Umění řešit matematické problémy*. Praha, HAV, 2013.
[9] Polya, G.: *How to Solve It?* Princeton, Princeton University Press, 1973.
[10] Wittmann, E.: *Complementary Attitudes in Problem Solving*. In: Educational Studies in Mathematics, Vol. 4., 1971.

Adresa autora:

Přírodovědecká fakulta Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem,
Pasteurova 3632/15, 400 96 Ústí nad Labem
e-mail: `jan.kopka@ujep.cz`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2021 (50)

A ostatné sa pridá

Anatolij Dvurečenskij, Martin Papčo

Tento text je venovaný *doc. RNDr. Romanovi Fričovi, DrSc.*, vedúcemu vedeckému pracovníkovi Matematického ústavu SAV a univerzitnému učiteľovi Katolíckej univerzity v Ružomberku, ktorý po krátkom a ťažkom priebehu ochorenia na COVID 19 v stredu 13. januára 2021 zomrel.

Obom autorom bol blízkym človekom, spolupracovníkom a kamarátom, druhému z nich doktorandským školiteľom. Preto sa miestami zámerne nebude možné vyhnúť aj osobnejšiemu tónu (a v celom texte iba menu a priezvisku bez titulov). Portrét – a práve o to pôjde – nemôže byť výstižný bez dobrého svetla a primeranej perspektívy. Tradičné poradie komponentov takéhoto druhu textov bude kvôli tomu v tomto prípade trochu poprehadzované – to, čo býva zvyčajne na konci a akosi dodatkové, zaznie na začiatku ako interpretačný kľúč. A keďže portrét nemôže byť úplný bez toho, aby prehovoril sám aktér, budú citované aj jeho myšlienky. Čoskoro vo vydavateľstve Katolíckej univerzity v Ružomberku *Verbum* vyjde pilotný diel edície *Osobnosti slovenskej matematiky* venovaný práve Romanovi Fričovi ([2]). Jeho editor Štefan Tkačik do neho okrem iného zahrnul životopis hlavného hrdinu jeho vlastnými slovami i rozhovor s ním. Na účel tohto textu poslúži ako ideálny citačný zdroj (a vtedy to bude vysádzané v úvodzovkách).

Obľúbeným a často používaným uzavretím pracovnej i priateľskej záležitosti Romanom Fričom bolo *„a ostatné sa pridá“*. Ide o parafrázu biblického a to predposledného verša 6. kapitoly Evanjelia podľa svätého Matúša: *Hľadajte najskôr Božie kráľovstvo a jeho spravodlivosť a toto všetko sa vám pridá.* Je vlastne bodkou za kázaním Ježiša Krista na hore, ktoré sa otvára tvrdým apelom na konanie dobra v skrytosti. A v ktorom okrem iného aj prítomných učí modlitbu *Otče náš*. V celom kresťanskom posolstve (vskutku v celej Západnej civilizácii) má výnimočné postavenie. Pretriasajú sa tam rôznorodé ľudské situácie – ako odpúšťať, ako sa postiť a pritom sa nemračiť, ako zhromažďovať poklady nezničiteľné moľou a hrdzou, ako nemožno slúžiť dvom pánom. A spomína sa tam tiež osud poľných ľalií ako reakcia na malovernosť prítomných, ako odpoveď na obavy človeka o svoju existenciu. *V celom jazyku a literatúre asi nie je nič také dokonalé ako použitie stupňovania* v predmetnom podobenstve, píše vo *Večnom človekovi* G. K. Chesterton a celú úvahu uzatvára z paralely plynúcim poznaním, že síce *občan je dôležitejší než otrok, ale že duša každého človeka je predsa len nekonečne dôležitejšia než občan či štát*.

Táto, do životného postoja zažratá fráza, prichádzajúca v príhodnú chvíľu na jazyk, je teda tou lakonickou optikou, cez ktorú je nutné sa dívať na portrét Romana Friča. *„Viera je nezaslúžený dar. Je veľa vecí medzi Nebom a Zemou, na ktoré veda nestačí, ale viera dáva životu zmysel. Veda i viera mne (hriešnemu človeku) určite pomáhali sa orientovať a aj keď niekto hovorí, že sa veda a viera vylučujú, ja som nič také nezistil. Ba naopak!“* Čiže tie dve, Fides et Ratio, povestné krídla Karola Wojtyłu, umožňovali Romanovi Fričovi zmysluplne sa hýbať životom. V jeho prípade sa však máli to takto uzavrieť. Každý, kto ho len o čosi viac poznal, si ho totiž spájal prinajmenšom so srdečným, povzbudzujúcim úsmevom. („Povedz voľačo vtipné!“) A vskutku to aj zapadá do celej metafory: Dve krídla sú na let primálo, je potrebné nielen sa vo vzduchu udržať, ale aj v turbulenciách nestratiť výšku a pri zlej viditeľnosti nezablúdiť, udržať vytýčený smer. Jednoducho je nutné mať aj kormidlo. V tomto prípade ním bol humor.

Akoby vedľajším, mimovoľným produktom jedného zo zamyslení G. K. Chestertona (áno, opäť a vôbec nie náhodou on) o človekovi je vcelku trefné vystihnutie motivácie práce matematika: *Prvý filozof skrátka rozjímal nad metafyzikou tak, ako prvý matematik rozjímal nad matematikou; pre lásku k pravde alebo zo zvedavosti, alebo len tak pre zábavu.* Áno, silné zaujatie prísť veci na kĺb, mať oči doširoka otvorené a cítiť sa pri tom ako dieťa. Akurát že pre Romana Friča by sa patrilo namiesto dvoch disjunkcií použiť dve konjunkcie.

Roman Frič sa narodil 30. septembra 1944 v Prešove do rodiny lekára. Mal dvoch starších bratov a sestru. Po skončení vojny sa rodina presťahovala do Košíc, kde podľa jeho slov prežil *báječné detstvo, plné kamarátov, prírody, športu a kníh. „Obdivoval som svet dospelých, najmä zážitky o dekádu starších bratov a historky zo sveta rodičov a starých rodičov. Tí sa obávali, že v škole ‚vyzvoníme‘ čo sa hovorí doma, a tak sa začal vo mne vytvárať obraz dvoch svetov. Vystihuje to ‚matematický‘ vtip, ktorý hovorí, že život v socializme sa podobá na komplexné číslo, lebo má reálnu a imaginárnu zložku. Azda aj to ma neskôr viedlo k rozhodnutiu študovať matematiku, veď ‚$2 + 2 = 4$‘ v každom svetonázore.“*

Počas vzdelávania na chýrnom gymnáziu na Kováčskej ulici padla voľba na štúdium matematiky na Karlovej univerzite v Prahe ako vedy *„nepoškvrnenej politikou a kompromismi“*. Urobil tak s dvomi spolužiakmi. *„Tomy (Tomáš Glatz), s vysokým IQ, sa vedel rýchlo zorientovať a nájsť riešenie, Laci (Ladislav Ferenczi) mal bohatú intuíciu a zmysel aj pre skryté súvislosti a ja, aj keď mi to dlhšie trvalo, snažil som sa* hľadať alternatívy a veci porozumieť čo ‚najjednoduchším spôsobom‘. *“* Po maturite v roku 1962 ďalších päť rokov (1962 – 67) študoval na Matematicko-fyzikálnej

Roman Frič počas prednášky na Czech-Polish-Slovak Mathematical Conference 2015.
Foto: Anton Kulan

fakulte Karlovej univerzity v Prahe. Jeho ročníkovým učiteľom bol akademik V. Jarník. Ďalšími pedagógmi tiež P. Vopěnka a P. Hájek. Najprv, ako to bolo v tých časoch zvykom, študoval dva roky matematiku a fyziku. Potom si od tretieho roka vybral matematickú špecializáciu *Matematická štatistika a pravdepodobnosť*. V tej dobe ju prednášali špičkoví odborníci na čele s prof. J. Hájekom, ktorý viedol katedru. Učili tiež známe pravdepodobnostné a štatistické esá ako M. Josífko, J. Machek, O. Fischer, F. Fabian, V. Dupač, K. Winkelbauer, J. Anděl, J. Seitz, M. Jiřina, J. Novák a vtedy mladá asistentka (neskôr vynikajúca profesorka) J. Jurečková.

Na vysokej škole začal Roman Frič popri štúdiu robiť u prof. J. Nováka aj pomocnú vedeckú silu. Akademik, odchovanec svetového topológa Eduarda Čecha, viedol v Matematickom ústave ČSAV *Oddelenie štatistických metód*, študentom prednášal teóriu miery a zároveň bol vedúcim vedeckého seminára zameraného na topologické a algebrické metódy v pravdepodobnosti. *„Chcel, aby pracovníci jeho oddelenia mali hlboké teoretické vedomosti a viacerí z nich dosiahli výborné výsledky v oblasti spojitých štruktúr. Tak som sa aj ja dostal ku topológii. Lúskal som Bourbakiho knižky, ktoré boli v tej dobe v móde a začal som študovať práce o sekvenčnej spojitosti.“* (σ-aditivita ohraničenej miery sa dá ekvivalentne charakterizovať ako sekvenčná spojitosť.) Profesor Novák rozpracoval topologickú konštrukciu rozširovania miery z okruhu množín na generovaný σ-okruh bez použitia Carathéodoryho vonkajšej miery a táto problematika sa stala na dlhé roky aj predmetom bádania Romana Friča. *„V MÚ ČSAV v Žitnej ulici č. 25 v Prahe som potom interne pracoval v rokoch 1966 – 1972 a ako ‚externista a korešpondent' Novákovho seminára až do roku 1993. Od začiatku som sa tam stretol so srdečnosťou, ochotou a všestrannou pomocou spolupracovníkov a ‚otvorili sa mi matematické dvere' doma i v zahraničí."*

Prof. Novák býval prezidentom svetových topologických konferencií (*Prague Topological Symposium on General Topology*), kde mladý vedecký ašpirant nadviazal prvé medzinárodné kontakty a získal cenné skúsenosti. A práve tam mu vtedajší prorektor na Vysokej škole dopravnej (v tom čase docent) J. Moravčík ponúkol spolu s bytom na tomto pracovisku miesto. *„To mi pomohlo vyriešiť v tej dobe ťažkú situáciu s bývaním pre mladú slovenskú nízkopríjmovú rodinu. Ba čo viac, prorektor Moravčík mi vybavil aj polročný študijný pobyt v USA v rámci programu* International Research and Exchange.*"* To bol svojim spôsobom zázrak, pretože hoci dnešní mladí ľudia môžu cestovať po celom svete, začiatkom 70-tych rokov, keď začala komunistická normalizácia, to bolo výnimkou.

„Ako sa to stalo? Nuž bolo po politických previerkach, bol som mladý a nádejný slovenský vedec, v Žiline nepopísaný biely list a s podporou Prahy... Po návrate som zistil, že mám vstúpiť do strany a robiť kariéru, preto som radšej hľadal únikovú cestu. Chvalabohu, Matematický ústav SAV v tej dobe zakladal v Košiciach pracovisko na čele s vynikajúcim matematikom a nestraníkom akademikom Jánom Jakubíkom, a tak napriek obštrukciám a za výdatnej pomoci riaditeľa MÚ SAV akademika Štefana Schwarza, významného matematika a bývalého predsedu SAV, som zakotvil v Košiciach."

Už skúsený vedecký pracovník Roman Frič sa teda v roku 1979 vrátil do Košíc a začal pracovať na Detašovanom pracovisku MÚ SAV. Tam pracoval až do smrti, isté obdobie aj ako jeho úspešný vedúci. V roku 1993 sa stal docentom (MFF UK Bratislava) a v roku 1995 na tému *Sekvenčná konvergencia: rozširovanie, zúplňovanie, zväčšovanie, iterovanie* obhájil na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach veľký doktorát (DrSc.).

Medzi etapy života Romana Friča so silným obsahom, osobnou zaujatosťou i veľkou výpovednou hodnotou patrí aj tá, ktorá je (a prirodzeným spôsobom) spojená so vznikom a budovaním Katolíckej univerzity v Ružomberku. *„V dobe vzniku katolíckeho školstva bolo v radoch veriacich pomerne málo formálne kvalifikovaných pedagógov, čo bolo dané systémom socialistického školstva. Z časov môjho pôsobenia na VŠD v Žiline som poznal prof. P. Kluvánka a prof. J. Ďurčeka, ktorí sa zaslúžili o založenie Katecheticko-pedagogického inštitútu sv. Ondreja v Ružomberku, poznal som aj ďalších tam pôsobiacich pedagógov a poradil som dcére, aby išla študovať do Ružomberka. Slovo dalo slovo a začal som v Ružomberku aj učiť, najprv externe a neskôr na plný úväzok."*

Prednášal rôzne predmety a snažil sa napomáhať odbornému rastu mladších kolegov. Ružomberskej katedre sa podarilo zapojiť do rozbehnutej medzinárodnej spolupráce matematikov na pedagogických fakultách v Krakove, Čenstochovej a Ústí nad Labem. Konali sa rotujúce každoročné konferencie, študijné a prednáškové pobyty, koordinovali sa opatrenia na skvalitnenie výučby matematiky a prípravy budúcich učiteľov. *„Osobné kontakty a spoluprácu pedagógov zo stredoeurópskeho prostredia pokladám za veľmi vydarenú aktivitu, ktorá po každej stránke pozdvihla úroveň výučby matematiky na Katolíckej univerzite v Ružomberku. Z vlastnej skúsenosti môžem hovoriť o ‚pridanej hodnote' štúdia na KU, ktorá sa okrem katolíckeho ducha prejavovala aj nadštandardnými vzťahmi medzi pedagógmi a poslucháčmi. Roky v Ružomberku (aj napriek dochádzaniu z Košíc) považujem za báječné a požehnané. Viacročná spolupráca so skúsenými poľskými, českými a maďarskými pedagógmi bola pre mňa výbornou ‚pedagogickou univerzitou'."*

Vďaka univerzitnému účinkovaniu Romanovi Fričovi k vedeckému krídlu pribudlo aj druhé – učiteľské (opäť s rozpätím dvoch krídel…). *„‚Obcovanie' so študentmi ma veľmi obohatilo. Ale celý život by som ‚učiteľovať' nechcel. ... Neverím na ‚jednotnú školu a jednotné osnovy', oveľa viac by som výber a spôsob ‚čo a ako' nechal na učiteľoch. Ak už predsa, tak by som kládol dôraz na „vizualizáciu" matematiky. Menej vzorcov, rovníc a manipulácií s výrazmi, viac grafických animácií, menej slov a viac dynamických manipulácií. Pre tých talentovanejších viac porozumenia textu, schopnosť formulovať svoje nápady, logiku a riešenie voľnejšie formulovaných problémov zo života okolo nás."*

Roman Frič svoje učiteľské krédo zhrnul do troch zásad: *„1. Žiaci a študenti musia vycítiť, že učiteľovi na nich a na predmete záleží. 2. Niektoré poznatky sa môžu a majú ‚nadrilovať', sem patria aj poučky, klasifikačné schémy a kanonické experimenty. 3. Nadstavba vyžaduje záujem žiaka a študenta, chuť študovať a premýšľať, tu sa prejaví kvalita učiteľa a výsledkom je ‚pridaná hodnota', čo sa prejaví na počte a dobrom uplatnení absolventov, ktorí sa ku svojmu učiteľovi hlásia. Takto sa odovzdáva aj potešenie z matematiky (aj z iných predmetov)."*

Prvým oborom, ktorému sa Roman Frič (pod vplyvom akad. J. Nováka) venoval, bola teória pravdepodobnosti. Ukázalo sa, že topologické metódy v pravdepodobnosti sú nielen zaujímavé, ale aj užitočné. Takže postupne sa z neho stal odborník na všeobecnú topológiu. Prvotne bol takto vnímaný aj prvým autorom tohto textu, a že je vyučený pravdepodobnostiar bolo prekvapením. Dizertačná práca Romana Friča sa týkala Čechovej – Stonovej kompaktifikácie a jej vzťahu k Hewittovej realkompaktifikácii. Jeho topologické záujmy získali novú dimenziu, keď strávil päť mesiacov na študijnom pobyte u svetoznámeho topológa prof. E. Hewitta na University of Washington (potom ešte na University of Princeton a University of California). Počas *topologického obdobia* mu vyšlo okolo 80 vedeckých prác. Z tejto oblasti vyškolil aj doc. RNDr. L. Mišíka, CSc., ktorý teraz pôsobí na univerzite v Ostrave.

V 90-tych rokoch sa Roman Frič začal venovať svojej novej matematickej láske – kvantovým štruktúram, matematickej teórii inšpirovanej problémami základov merania v kvantovej mechanike. *Slovenská škola kvantových štruktúr* má medzinárodné uznanie a Roman Frič sa stal jej dôstojným reprezentantom. Jeden z jej slovenských príbehov začal vďaka dvom liptovsko-mikulášskym matematikom, doc. F. Kôpkovi a doc. F. Chovancovi, a ich – na nebi kvantových štruktúr novej štruktúre – diferenčným posetom (D-posetom). (Začiatkom 90. rokoch ich opísali v *Mathematica Slovaca*, pričom kľúčovú úlohu hral rozdiel dvoch porovnateľných prvkov. Inšpirovaní touto prácou krátko na to dvaja Američania D. J. Foulis a M. K. Bennett prišli s ekvivalentnou štruktúrou – efektovou algebrou, kde je prvotnou operáciou súčet navzájom vylučujúcich sa prvkov.) Roman Frič hneď vytušil veľký potenciál D-posetov pre teóriu pravdepodobnosti. Pomocou nich totiž možno opísať nielen klasické dvojhodnotové udalosti, ale aj nový fenomén – fuzzy udalosti. V tejto súvislosti sa vrátil aj k základom teórie pravdepodobnosti a to v jej novom háve a s novými myšlienkami. So svojim doktorandským odchovancom, druhým z autorov tohto textu, v druhej etape svojho vedeckého bádania študoval, čo vlastne fuzzy pravdepodobnosť je. A pritom si pomáhal aj metódami teórie kategórií i topológie. Z tejto oblasti mu bolo uverejnených vyše 40 vedeckých článkov. Viac-menej úplný zoznam publikačnej činnosti Romana Friča je možné nájsť v [1].

Ako už bolo naznačené na začiatku, výraznou črtou Romana Friča bola snaha pochopiť, prečo veci, matematika, pravdepodobnosť, fungujú tak ako fungujú. A to sa mu darilo. A to sa snažil vštepiť svojim študentom, aj svojim doktorandom, ako aj čitateľom asi 15 prác z oblasti didaktiky matematiky. Svoje zaujímavé výsledky prezentoval na početných svetových matematických fórach, kde sa vždy stretli so záujmom, a tiež bol na viacerých viacmesačných študijných pobytoch (univerzity v Trieste, Udine, Washington, Dijon, Matsuyama, Matsue, Cambridge). Bol aktívnym členom *International Quantum Structures Association* – združenia matematikov, fyzikov, logikov a filozofov zaujímajúcich sa o matematické základy kvantovej mechaniky. A bol činný aj v hnutí *Fides et Ratio* spájajúcom ľudí kresťanskej viery a vedy.

Mnohí, ktorí Romana Friča poznali, si ho spájajú, azda najviac, s ľudskosťou, ochotou pomôcť každému, svojim kolegom, študentom, obetavosťou. Spolu s milovanou manželkou Babcou vychovali spolu tri deti (zoznámil sa s ňou na vrchole pivovarského komína v Košiciach :). Bol známy pre svoj humor, všade, kde sa objavil, rozdával dobrú náladu. A múdrosť:

„Rovnako ako mnohí iní, aj my ‚traja mudrci z východu' (Tomy, Laci a ja) sme sa v mladosti pustili do sveta hľadať pravdu a zmysel života. Matematika nebola cieľom, ale bolo nám s ňou dobre a veselo. Ukázalo sa ale, že síce $2 + 2 = 4$*, ale nie všetko v živote možno spočítať."*

Literatúra – References

[1] Dvurečenskij, A.: *Doc. Roman Frič, DrSc., passed away*. Math. Slovaca 71 (2021), 5 – 10.

[2] Tkačik, Š.: *Osobnosti slovenskej matematiky, Roman Frič*. VERBUM – vydavateľstvo Katolíckej univerzity v Ružomberku, Ružomberok 2021.

Vážený pán docent a milý Roman,

za všetko čo si spravil pre slovenskú matematiku, Matematický ústav SAV i Katolícku univerzitu v Ružomberku a tiež za Tvoje priateľstvo Ti patrí naša vďaka. Na konci epitafov je zvykom uvádzať R. I.P., ale v Tvojom prípade by šlo tak trochu o nepochopenie veci a istý anachronizmus – v bezprostrednej Božej blízkosti, žriedla každého života, nie je priestor ani čas na odpočinok. Želáme Ti preto, aby si z tváre do tváre Prozreteľnosti naplno pokračoval vo svojom živote v jeho plnosti.

Adresy autorov:

Matematický ústav SAV, Štefánikova 49, 814 73 Bratislava
e-mail: `dvurecen@mat.savba.sk`

Katolícka univerzita v Ružomberku, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
e-mail: `papco@ruzomberok.sk`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2021 (50)

Vplyv mobilných technológií na žiaka vo vyučovaní fyziky

Jakub Čevajka, Klára Velmovská

Abstract: Mobile technologies are becoming part of the educational process in the Slovak schools. The article deals with the integration of mobile technologies into the educational process and specializes in developing activities and methodologies, using these technologies, for teaching physics. Part of the article are suggestions of activities for teaching physics, which were developed in accordance with iterations of Design-based research. In the article, we present two surveys that look at the impact of mobile learning on students in the affective and cognitive field.

Key words: mobile technologies, mobile learning, physics teaching, affective survey, cognitive survey

Súhrn: Mobilné technológie sa stávajú súčasťou vzdelávacieho procesu na slovenských školách. Článok sa venuje problematike integrovania mobilných technológii do vzdelávacieho procesu a špecializuje sa na tvorbu aktivít a metodík pre vyučovanie fyziky s využitím týchto technológií. Súčasťou článku sú návrhy aktivít pre vyučovanie fyziky, ktoré boli vyvíjané v súlade s iteráciami výskumu vývojom (orig. design-based research). V článku uvádzame dva prieskumy, ktoré sledujú dopad vzdelávania s mobilnými technológiami na študentov v afektívnej a kognitívnej oblasti.

Kľúčové slová: mobilné technológie, mobile learning, vyučovanie fyziky, prieskum v afektívnej oblasti, prieskum v kognitívnej oblasti

MESC: B70, C30, U60, U70

1 Úvod

Technologický pokrok v posledných rokoch zrýchľuje a mení podobu nášho každodenného života. Výrobcovia mobilných technológií viackrát za rok predstavujú nové modely svojich zariadení s množstvom ďalších funkcií. Nové technológie so sebou prinášajú skvelé možnosti ich využitia. Na technologický pokrok spoločnosti reagujú aj vzdelávacie systémy v rôznych krajinách sveta a mobilné technológie sa stávajú súčasťou vyučovacieho procesu.

Mobilné technológie sú pre študentov súčasťou ich každodenného života, avšak stretávame sa s nariadeniami, ktoré obmedzujú používanie týchto technológií v školskom prostredí. V školských poriadkoch nachádzame body týkajúce sa zákazov používania smartfónov a tabletov na školách a príkazy na vypnutie alebo odloženie týchto zariadení počas vyučovacieho procesu. Škola sa preto môže študentom zdať odtrhnutá od ich vnímania bežného života.

Na Slovensku však existujú aj školy, ktoré sa rozhodli začleniť mobilné technológie do vyučovacieho procesu a stali sa súčasťou niektorých z projektov implementujúcich tieto technológie do prostredia škôl. Medzi tieto projekty patria napríklad projekt *Škola na dotyk, Digi škola, Vzdelávame pre budúcnosť* alebo prebiehajúci projekt *IT Akadémia*. Vďaka týmto aktivitám sa na vybraných školách zriadili učebne vybavené tabletmi a mnohými ďalšími modernými digitálnymi technológiami.

Tento článok sa sústreďuje na použitie mobilných technológií vo vyučovaní fyziky. V článku preto predstavíme možnosti použitia smartfónov a tabletov ako zariadení na meranie fyzikálnych veličín. Na ich meranie môžeme využiť interné senzory smartfónov a tabletov s použitím vhodnej aplikácie. Nové spôsoby realizovania školských meraní a experimentov prinášajú externé meracie senzory spoločnosti *Vernier*. Produkty tejto spoločnosti umožňujú rôzne spôsoby prepojenia meracích jednotiek a senzorov so smartfónmi a tabletmi.

Súčasťou článku je predstavenie aktivít s využitím mobilných technológií pri zavádzaní vybraných pojmov z oblasti statiky kvapalín a témy tlak. K jednotlivým aktivitám sme vytvárali metodické materiály pre učiteľa a žiaka v súlade s iteráciami kvalitatívnej metodológie výskumu vývojom (orig. design-based research). Použiteľnosť navrhnutých materiálov a vypracovaných metodík sme overili v praxi.

Za ťažisko práce považujeme dva prieskumy, ktoré skúmajú dopad vyučovania s mobilnými technológiami na študentov v kognitívnej a afektívnej oblasti. V prieskumoch sledujeme zmenu postojov študentov k vyučovaciemu predmetu fyzika po zaradení mobilných technológií do vyučovania. Taktiež porovnáme dosiahnuté výsledky v teste týchto študentov so študentmi, ktorí mobilné technológie počas vyučovania nepoužívali.

2 M-learning

Implementácia nových technológií do života spoločnosti si vyžaduje osvojenie nových spôsobilosti. Technológie sprístupňujú informácie novými spôsobmi, a preto majú informačné a komunikačné technológie významné miesto v oblasti vzdelávania. *„Ovplyvňujú spôsob myslenia a poskytujú nové nástroje interpretácie študijných materiálov. Posilňujú kritické myslenie a prispievajú k schopnosti učiaceho sa riešiť problémy spojené s prácou v bežnom živote.“* [1] Reakciou na tieto skutočnosti bolo zavedenie *m-learningu* ako doplnenie tradičnej formy vzdelávania.

Problematike integrovania mobilných technológií do vzdelávacích systémov a forme vyučovania m-learning sa venuje viacero autorov [2-5]. Herrington [6] vo všeobecnosti chápe m-learning ako formu vyučovania, pri ktorej sú informácie sprostredkované prostredníctvom mobilných technológií.

Kearney [7] uvádza, že m-learning je opisovaný viacerými spôsobmi, avšak vo všetkých definíciách nájdeme spojitosť medzi používaním mobilných zariadení a formami vyučovania. Zjednodušuje teda m-learning na proces vyučovania sprostredkovaný mobilnými zariadeniami.

K úplnému vymedzeniu pojmu m-learning je nevyhnuté uviesť, čo chápeme pod pojmom mobilné technológie. V tomto článku budeme pod pojmom mobilné technológie chápať tablety (tablet PC) a smartfóny, využitím ktorých sa budeme v ďalších častiach článku zaoberať.

3 Metodológia prieskumu

Hlavným cieľom našej práce bolo umožniť študentom pracovať s mobilnými technológiami na hodinách fyziky. Tieto technológie umožňujú jednoduché meranie fyzikálnych veličín a poskytujú množstvo aplikácií využiteľných vo vyučovacom procese. Zaujímal nás taktiež dopad používania týchto technológií na vyučovací proces.

Súčasťou našej práce bola tvorba aktivít a materiálov (intervencií – list pre učiteľa, list pre žiaka) pre vyučovanie fyziky, v ktorých sú implementované mobilné technológie. Takýchto materiálov je pre učiteľov fyziky na Slovensku nedostatok a mnohí z nich nevedia ako s mobilnými technológiami pracovať a čo im ponúkajú. Šišková [8] uvádza potrebu využitia kvalitatívneho výskumu pri tvorbe produktov, ktoré sa viažu k teórii. Taktiež uvádza, že je málo stratégií, ktoré povoľujú výskumníkovi byť v roli vývojára. Pre potreby našej práce sme preto vybrali kvalitatívnu metódu výskumu design-based research alebo výskum vývojom.

„Výskum vývojom (orig. design-based research) sa vyvinul na začiatku 21. storočia a bol vyhlásený ako praktická výskumná metodológia, ktorá by mohla účinne preklenúť priepasť medzi výskumom a praxou vo formálnom vzdelávaní.“ [9]. Kalaš [10] uvádza, že výskum vývojom je interdisciplinárny prístup, v ktorom sa výskumníci spolu s praktickými edukátormi (učiteľmi) snažia vytvárať presnejšie teórie učenia sa, a to pomocou navrhovania, vytvárania, štúdia a iteratívneho vylepšovania teoreticky opodstatnených intervencií pre učenie sa v reálnej triede.

Metodológia výskumu vývojom je iteratívna paradigma. Výskum prebieha v jednotlivých iteráciách, v ktorých sme sa zorientovali v oblasti používania mobilných technológií a vytvárali aktivity pre vyučovanie fyziky s metodickými materiálmi, ktoré sme implementovali do vyučovacieho procesu. V rámci vývojovej iterácie sme si stanovili výskumné otázky

- *O1: Vyskytnú sa počas realizovania navrhnutých aktivít problémy zasahujúce do navrhnutej formy intervencií?*

- *O2: Majú navrhnuté aktivity spojené s využitím mobilných technológií vo vyučovaní fyziky vplyv na postoj študentov k vyučovaciemu predmetu fyzika?*
- *O3: Získajú študenti používajúci pri vzdelávaní mobilné technológie vyššie skóre v didaktickom teste ako študenti, ktorí s týmito technológiami nepracovali?*

Dáta viažuce sa k výskumnej otázke O1 sme získali pozorovaním vyučovacej hodiny a zaznamenávali sme ich ako terénne zápisky z vyučovacej hodiny. Po zbere a analýze dát sme zapracovali fakty vyplývajúce z pozorovania vyučovacích hodín do existujúcich metodických materiálov k navrhnutým aktivitám. Dáta potrebné k výskumnej otázke O2 sme získali pomocou *pretestu* a *posttestu* žiackych postojov k vyučovaciemu predmetu fyzika. K výskumnej otázke O3 sme hodnotili žiacke odpovede v didaktickom teste realizovanom pred polročným hodnotením na gymnáziu.

4 Návrhy aktivít s využitím mobilných technológií

Vyučovanie prírodných vied, a teda aj fyziky, sa v nových trendoch sústreďuje na aktívnu činnosť žiaka vo vyučovacom procese, počas ktorej žiak nadobúda nové skúsenosti, zručnosti, poznatky a vedomosti. Lapitková [11] uvádza, že dnes sa chápe prírodovedné vzdelávanie ako konštruovanie poznatkov, na ktorom sa žiak aktívne podieľa. Učiteľ má byť v tomto procese pomocníkom, ktorý uľahčuje žiakom objavovanie a konštruovanie pojmov či pochopenie fyzikálnych javov. *„Takto chápané vyučovanie sa začína obyčajne skúmaním javov, najlepšie pomocou praktických činností. Úloha pochopiť vzťahy a využiť vedomosti je prenesená na žiaka.“* [11]

Na základe týchto faktov sme navrhli aktivity s využitím mobilných technológií, ktoré podporujú aktívnu činnosť žiaka vo vyučovacom procese. V aktivitách sme využili interné senzory zariadení s použitím vhodnej aplikácie pre meranie, externé senzory spoločnosti *Vernier* s aplikáciou na meranie a spracovanie dát a jednoúčelové aplikácie na testovanie, tvorbu poznámok, zber dát a tvorbu myšlienkových máp.

K jednotlivým aktivitám sme vytvorili metodické materiály (metodické listy pre učiteľa, pracovné listy pre žiaka), ktoré opisujú spôsob prevedenia aktivít. Učiteľské listy obsahujú:

- zaradenie aktivity v rámci Štátneho vzdelávacieho programu,
- časovú náročnosť aktivity,
- poznatky, s ktorými žiak do vyučovacieho procesu prichádza,
- ciele sformulované vo vzťahu k žiakovi, ktoré aktivita napĺňa,
- zadanie aktivity,
- pomôcky potrebné pre realizovanie aktivity,

- podrobný plán hodiny s jednotlivými krokmi a smerujúcimi otázkami na žiaka,
- vzorové riešenie.

V nasledujúcich častiach článku opíšeme jednotlivé navrhnuté aktivity. Aktivity sme realizovali so študentmi podľa scenára BYOD. Bring Your Own Device je spôsob implementácie mobilných technológií, pri ktorom žiaci používajú svoje vlastné zariadenia (smartfóny, tablety) na podporu svojho vzdelávania. [12]

Meranie veľkých rozmerov

- Použitá aplikácia: Smart Measure, 3D ON Measure
- Úloha: Určiť výšku budovy pomocou jej odrazu na vodnej hladine a pomocou mobilnej aplikácie.
- Časová náročnosť: 1 vyučovacia hodina (45 min.)

Skúmame tlak

- Použitá aplikácia: Socrative
- Úloha: Pozorovanie fyzikálneho javu a jeho vysvetlenie požitím pojmov tlak, tlaková sila, Pascalov zákon, hydraulické zariadenie.
- Časová náročnosť: 2 vyučovacie hodiny (90 min.)

Skúmame tlak pod hladinou vody

- Použitá aplikácia: Vernier Graphical s využitím externého meracieho senzora tlaku
- Úloha: Experimentálne určenie vzťahu pre veľkosť hydrostatického tlaku.
- Časová náročnosť: 2 vyučovacie hodiny (90 min.)

Skúmame vztlakovú silu

- Použitá aplikácia: Vernier Graphical s využitím externého meracieho senzora sily
- Úloha: Experimentálne určenie vzťahu pre veľkosť vztlakovej sily.
- Časová náročnosť: 2 vyučovacie hodiny (90 min.)

Archimedov zákon – úloha Titanic

- Použitá aplikácia: Internetový prehliadač
- Úloha: Na základe filmovej ukážky rozhodnúť, či by plávajúce drevo udržalo oboch hrdinov filmu za predpokladu, že sa obaja naň dostanú. Svoje tvrdenia má žiak podložiť výpočtami a potrebné údaje pre výpočet vyhľadať, resp. odhadnúť.
- Časová náročnosť: 1 vyučovacia hodina (45 min.)

Myšlienková mapa

- Použitá aplikácia: Mindomo
- Úloha: Úlohou študenta je z daných pojmov vytvoriť myšlienkovú mapu. Svoju mapu môže doplniť o ďalšie pojmy, definície, komentáre, experimenty a obrázky spojené s témou tlak.
- Časová náročnosť: 2 vyučovacie hodiny (90 min.)

5 Prieskum dopadu používania mobilných technológií na vyučovanie fyziky

V rámci implementácie mobilných technológií a navrhnutých aktivít do vyučovacieho procesu sme sledovali dopad týchto aktivít v afektívnej a kognitívnej oblasti študentov. Zrealizovali sme prieskumy v týchto oblastiach pôsobenia mobilných technológií na študentov, ktorých výsledky uvedieme v častiach 5.1 a 5.2 tohto článku.

5.1 Prieskum zameraný na porovnanie postojov študentov k vyučovaciemu predmetu fyzika

Úlohou prieskumu bolo zistiť zmenu postojov študentov k vyučovaciemu predmetu fyzika pred a po zaradení mobilných technológií do vyučovacieho procesu. V danom prieskume sme si zvolili hypotézu

H1: Študenti budú mať pozitívnejší postoj k vyučovaciemu predmetu fyzika a priebehu jeho vyučovania po zaradení mobilných technológií do vyučovacieho procesu.

Na získanie dát sme použili dotazník zisťujúci postoje študentov k vyučovaciemu predmetu fyzika a priebehu jeho vyučovania prevzatý z [13]. V dotazníku študenti vyjadrovali svoj súhlas, resp. nesúhlas, s danými výrokmi. Študenti vypĺňali identický dotazník pred (pretest) a po (posttest) zaradení mobilných technológií do vyučovacieho procesu.

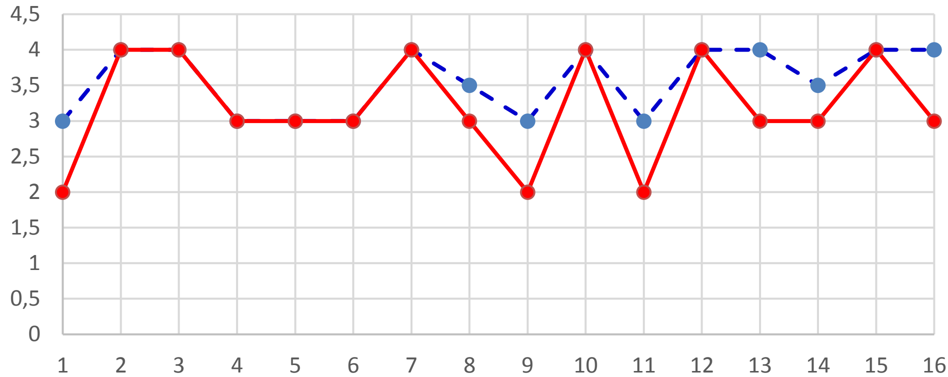
Prieskum sme realizovali na bilingválnom gymnáziu C. S. Lewisa v Bratislave so študentmi prvého ročníka. V preteste sa v dotazníku vyjadrilo 42 študentov a postteste 43 študentov. Vek študentov sa pohybuje v rozmedzí 14 až 15 rokov. Študenti na predchádzajúcich základných školách mobilné technológie vo vyučovaní fyziky nepoužívali. Študenti pracovali s mobilnými technológiami v priebehu šiestich mesiacov od novembra do apríla, v školskom roku 2016/2017. V nasledujúcej tabuľke (Tab. 1) uvádzame počet chlapcov a dievčat v prieskumnej vzorke v preteste i posttest.

Tab. 1: *Zastúpenie chlapcov a dievčat v preteste a postteste.*

	Chlapci	Dievčatá	Spolu
Pretest	17	25	42
Posttest	17	26	43

5.1.1 Spracovanie a interpretácia výsledkov prieskumu

V dotazníku študenti vyjadrovali svoj súhlas, resp. nesúhlas so 16-timi výrokmi na šesťstupňovej škále od silne nesúhlasím (hodnota 1) po silne súhlasím (hodnota 6). Na nasledujúcom obrázku 1 uvádzame graf hodnôt mediánov pre jednotlivé výroky v preteste (modrá prerušovaná krivka) a postteste (červená krivka).



Obr. 1*: Graf hodnôt mediánov pre jednotlivé výroky dotazníka postojov v preteste (modrá prerušovaná krivka) a postteste (červená krivka).*

Dotazník skúmal štyri oblasti postojov žiakov – I. postoj k predmetu fyzika, II. hodnotenie dôležitosti predmetu fyzika, III. sebahodnotenie žiakov v oblasti chápania jednotlivých vyučovaných oblastí predmetu fyzika a IV. hodnotenie vlastného pracovného úsilia. Ku každej z vymenovaných oblastí sa vzťahujú štyri výroky, ktoré študenti hodnotili. Mieru postojov v jednotlivých oblastiach vyjadruje medián pridelených bodov jednotlivých výrokov v danej oblasti.

Pozitívny postoj k vyučovaciemu predmetu fyzika a priebehu jeho vyučovania vyjadrujú hodnoty v intervale od 3 po 6. Mieru neutrálnych postojov vyjadruje hodnota 3. Mieru negatívnych postojov vyjadrujú hodnoty v rozmedzí od 0 po 3. V nasledujúcej tabuľke (Tabuľka 2) uvádzame hodnoty mediánov výskumnej vzorky študentov v jednotlivých skúmaných oblastiach v preteste a postteste.

Tab. 2: *Hodnoty skóre výskumnej vzorky študentov v jednotlivých oblastiach postojov.*

Oblasť		Pretest	Posttest
I.	Postoje k fyzike	3	2,5
II.	Hodnotenie dôležitosti fyziky študentmi	4	3,5
III.	Sebahodnotenie študentov v oblasti ich schopnosti chápať fyzikálne učivo a v oblasti vlastných výkonov vo fyzike	3,25	3
IV.	Hodnotenie vlastného pracovného úsilia študentmi	4	4

5.1.2 Diskusia k výsledkom prieskumu

Prieskumom sme overovali hypotézu, ktorá sa týkala zmeny postojov študentov k vyučovaciemu predmetu fyzika po zaradení mobilných technológií do vyučovacieho procesu. V hypotéze sme predpokladali, že študenti budú mať pozitívnejší postoj k vyučovaciemu predmetu fyzika a priebehu jeho vyučovania po zaradení týchto technológií do vyučovania.

Hodnoty mediánov pre jednotlivé výroky dotazníku uvádzané v grafe (obr. 1) naznačujú, že sa postoj študentov k vyučovaciemu predmetu fyzika nezlepšil. Mediány v jednotlivých oblastiach v preteste sa hýbu od hodnoty 3 (I. oblasť) po hodnotu 4 (II. a IV. Oblasť), čo naznačuje mierne pozitívny postoj študentov k vyučovaciemu predmetu fyzika a priebehu jeho vyučovania. V postteste sme zaznamenali pokles hodnôt mediánov v oblasti I., II. a III. V oblasti III. však hodnota mediánu vyjadruje neutrálny postoj rovnako v preteste i postteste a v oblasti II. medián tiež vyjadruje pozitívny postoj v preteste i postteste. V oblasti I. hodnota mediánu v postteste klesla avšak je blízka hodnote 3, ktorá vyjadruje neutrálny postoj. V oblasti IV. sme získali rovnakú hodnotu skóre v preteste i postteste a to 4, ktorá vyjadruje pozitívny postoj. Keďže v troch zo štyroch oblastí dotazníka sme identifikovali rovnaké postoje študentov v preteste i postteste, môžeme prehlásiť, že sa postoje študentov k vyučovaciemu predmetu fyzika a priebehu jeho vyučovania nezmenili.

Výsledky prieskumu pokladáme napriek tomu za pozitívne zistenie. Postoje žiakov majú trend zhoršovania sa v priebehu školskej dochádzky. Tento fakt uvádza taktiež Vankúš [14]. V prieskume realizovanom v spolupráci s University of Cambridge na slovenských študentoch skúmal rozdiel postojov študentov vo veku 11 a 15 rokov k vyučovaciemu predmetu matematika. Vo výsledkoch preukázal, že študenti vo veku 15 rokov majú horšie postoje k vyučovaciemu predmetu ako študenti vo veku 11 rokov.

Domnievame sa, že výsledný stav žiackych postojov ovplyvnilo množstvo rôznych faktorov. Jedným z faktorov mohol byť prechod zo základnej školy na gymnázium. Vyučovanie fyziky na týchto stupňoch škôl sa značne líši. Fyzika na gymnáziu sa študentom môže zdať náročnejšia, hlavne z dôvodu nárokov na matematické zručnosti. Myslíme si, že postoje študentov k vyučovaciemu predmetu môže ovplyvniť taktiež zaujatosť, resp. nezaujatosť študenta danou oblasťou skúmania v rámci predmetu. Pre tieto fakty by bolo adekvátne zaradiť mobilné technológie do vyučovania v dlhšom časovom období a následne skúmať posun postojov študentov viackrát počas prebiehajúceho vyučovacieho procesu. Vhodné by bolo porovnať postoje študentov s kontrolnou skupinou, teda so študentmi, ktorý by mobilné technológie na vyučovaní nepoužívali. Porovnaním skupín by sme skúmali zmenu postojov vplyvom mobilných technológií.

5.2 Prieskum zameraný na porovnanie študijných výsledkov

Úlohou prieskumu bolo porovnať výkon študentov používajúcich mobilné technológie vo vyučovacom procese a študentov, ktorý tieto technológie nepoužívali, v didaktickom teste. Vo vzťahu k úlohe prieskumu sme zvolili hypotézu

H2: Študenti kontrolnej skupiny dosiahnu v didaktickom teste zameranom na tému Tlak vyššie bodové skóre ako študenti experimentálnej triedy.

Na získanie dát sme použili didaktický test, ktorý bol realizovaný pred polročným hodnotením vo všetkých prváckych triedach na gymnáziu C. S. Lewisa v Bratislave. Didaktický test sa skladal z troch typov úloh a to z úloh s výberom odpovede, otvorenou odpoveďou a úloh s výpočtom. Do prieskumu sme z didaktického testu vybrali osem úloh týkajúcich sa pojmov tlak, tlaková sila, hydraulické zariadenie a hydrostatický tlak. Výber úloh zodpovedal témam, pri ktorých sme so študentmi využívali mobilné technológie. Z jednotlivých typov úloh sme vybrali tri úlohy na výber odpovede, tri s otvorenou odpoveďou a dve úlohy s výpočtom. Úlohy si vyžadovali využitie vyšších myšlienkových operácií ako aplikáciu alebo hodnotenie nadobudnutých vedomostí. Jedna z úloh bola zameraná na priame vybavenie poznatku. Za vyriešenie náročnejších úloh získali žiaci vyššie bodové hodnotenie. V nasledujúcej časti textu uvedieme maximálne hodnoty bodov, ktoré mohli študenti získať za jednotlivé úlohy.

V úlohách s výberom odpovede mohli žiaci získať za každú úlohu 1 bod. V úlohách bola vždy práve jedna správna odpoveď zo štyroch možností. Študenti mohli získať bod len za správnu odpoveď a za označenie nesprávnej odpovede sme body nestrhávali. Z tejto časti sme hodnotili 3 úlohy teda maximálny možný počet získaných bodov sú 3 body. V otázkach s otvorenou odpoveďou sme hodnotili tri úlohy, pričom mohli študenti získať za jednotlivé úlohy maximálne dva body v prvej úlohe, tri body v druhej úlohe a dva body v tretej úlohe. Maximálny možný počet získaných bodov z otvorených úloh je teda 7 bodov. V úlohách s výpočtom sme hodnotili dve úlohy a študenti mohli získať za prvú úlohy maximálne štyri body a za druhú úlohu dva body. Maximálny možný počet získaných bodov v úlohách na výpočet je teda 6 bodov. V celkovom súčte mohli študenti získať vo vybraných úlohách z didaktického testu maximálne 16 bodov.

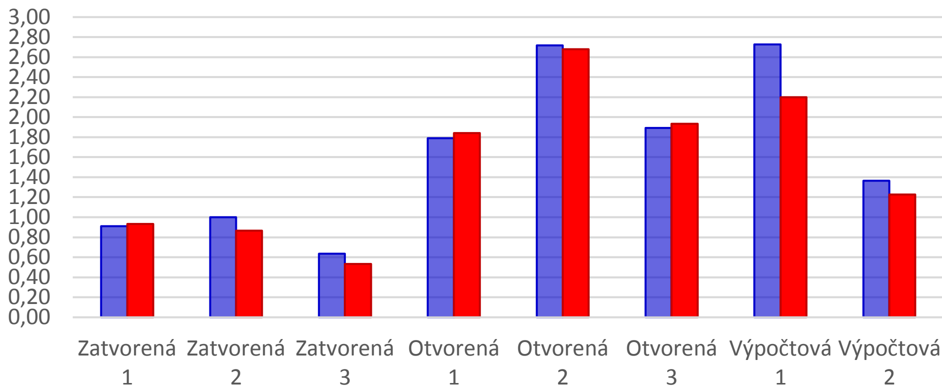
Experimentálnu a kontrolnú skupinu sme určili na základe výsledkov prijímacieho konania. Študenti prvých ročníkov boli do tried rozdelení podľa výkonu v testoch z anglického jazyka a všeobecných vedomostí, ktorými prešli počas prijímacieho konania, pričom test všeobecných vedomostí bol zameraný na prírodovednú a matematickú gramotnosť. Kontrolná skupina dosiahla v týchto testoch vyššie bodové skóre, čo nás viedlo k hypotéze, že títo študenti majú lepšie študijné predpoklady a teda by v každom testovaní mali byť úspešnejší. V experimentálnej i v kontrolnej skupine bolo zaradených 16 študentov. Vek študentov v skupinách sa pohyboval v rozmedzí 14 až 15 rokov. Experimentálna skupina používala na hodinách fyziky mobilné technológie. Kontrolná skupina tieto technológie nepoužívala, avšak vykonávala rovnaké experimenty a aktivity ako študenti experimentálnej skupiny. Didaktického testu sa zúčastnilo 11 študentov experimentálnej skupiny a 15 študentov kontrolnej skupiny. V nasledujúcej tabuľke (Tabuľka 3) uvádzame zastúpenie chlapcov a dievčat kontrolnej a experimentálnej skupiny, ktorý sa zúčastnili didaktického testu.

***Tab. 3** Zastúpenie chlapcov a dievčat v experimentálnej a kontrolnej skupine*

	Chlapci	Dievčatá	Spolu
Kontrolná skupina	10	5	15
Experimentálna skupina	4	7	11

5.2.1 Spracovanie a interpretácia výsledkov prieskumu

Na obrázku 2 uvádzame graf priemerných skóre, ktoré študenti experimentálnej (modrá) a kontrolnej (červená) skupiny získali v jednotlivých úlohách didaktického testu, pričom štatisticky budeme porovnávať celkové skóre študentov v didaktickom teste.



Obr. 2: Graf priemerného skóre v jednotlivých úlohách didaktického testu experimentálnej (modrá – ľavá vo dvojiciach) a kontrolnej (červená – pravá vo dvojiciach) skupiny.

V prieskume sme overovali hypotézu H2. Stanovili sme k nej nulovú hypotézu:

H02: Študenti kontrolnej a experimentálnej skupiny dosiahnu vo vedomostnom teste zameranom na tému Tlak rovnaké bodové skóre.

Pri overovaní hypotézy H02 sme porovnávali dva súbory dát – výsledky didaktického testu kontrolnej skupiny a experimentálnej skupiny. Dáta sme spracovávali v štatistickom programe R. Na základe Shapirovho testu sme zistili, že nie je možné zamietnuť hypotézu o normálnom rozdelení dát. Následne sme vykonali dvojvýberový jednostranný Studentov t-test (Tabuľka 4).

Tab. 4: Štatistické porovnanie bodového skóre v kontrolnej a experimentálnej skupine.

Welch Two Sample t-test	
Data	Experiment and kontrol
t	0.64688
Df	23.555
p-value	0.524
Mean of experiment	13.03636
Mean of kontrol	12.21333

Vypočítaná hodnota *p* (0,524) je väčšia ako 0,05 a preto hypotézu H02 nezamietame na hladine významnosti 95%. Keďže nulovú hypotézu nezamietame, bodové skóre študentov kontrolnej a experimentálnej skupiny v teste považujeme za porovnateľné. Ak porovnáme stredné hodnoty, zaznamenáme v experimentálnej skupine vyššiu hodnotu. Na základe štatistického porovnania však môžeme konštatovať, že rozdiel v stredných hodnotách nie je štatisticky významný.

5.2.2 Diskusia k výsledkom prieskumu

Porovnateľnosť výsledkov didaktického testu experimentálnej a kontrolnej skupiny považujeme za pozitívne zistenie. Študenti experimentálnej skupiny mali pred experimentálnym zásahom horšie študijné predpoklady. Tento fakt sme usúdili na základe prijímacích testov, ktoré boli zamerané aj na prírodovednú a matematickú gramotnosť. Domnievame sa, že používanie mobilných technológií vo vyučovacom procese vyžaduje od študentov väčšie zapojenie a potrebu aktívnej účasti na vyučovacích hodinách. Za možnú príčinu tohto výsledku taktiež považujeme používanie súkromných mobilných technológií študentov. Študenti si vo svojich zariadenia odnášali všetky potrebné informácie z vyučovacej hodiny a k týmto informáciám sa mohli kedykoľvek a kdekoľvek vrátiť. Možný prínos vidíme taktiež v zaujatosti študentov v práci s mobilnými technológiami. Na hodiny chodili študenti s pripravenými mobilnými zariadeniami, potrebnými nainštalovanými aplikáciami a niekoľko študentov sa zoznamovalo s aplikáciami v domácom prostredí pred ich použitím na vyučovacej hodine.

Príčinu zisteného stavu môžeme pripísať aj časovej náročnosti aktivít bez využitia mobilných technológií. Pri práci s technológiami sa zjednodušuje zber dát a tvorba grafu. Študenti sa teda môžu podrobnejšie a dlhší čas venovať interpretácii nameraných dát. Je však potrebné, aby mali osvojené spôsobilosti súvisiace s grafickou interpretáciou dát a rozumeli tomu, ako graf nameraných hodnôt vzniká.

Výsledky prieskumu však nie je možné generalizovať. Vhodné by bolo zaradiť mobilné technológie do vyučovacieho procesu v dlhšom časovom rozmedzí a zväčšiť vzorku študentov zapojených do prieskumu.

Záver

Predložený článok sa venoval problematike integrovania mobilných technológií do vyučovania fyziky.

V uvedených prieskumoch sme sledovali dopad používania mobilných technológií vo vyučovaní na postoje študentov k vyučovaciemu predmetu fyzika a ich výsledky v testovaní získaných vedomostí. Vo výsledku sa nepreukázala zmena postojov daných študentov k vyučovaciemu predmetu fyzika vplyvom používania mobilných technológií vo vyučovaní. Postoje študentov však môžu byť ovplyvnené prechodom zo základnej školy na gymnázium, čím sa kladú na študentov vyššie požiadavky, a taktiež aktuálnou témou, ktorej sa na hodinách fyziky študenti venujú.

V prieskume dosiahnutých výsledkov v teste sme porovnali výkony v polročných testoch vzorky študentov používajúcich mobilné technológie (experimentálna skupina) a študentov nepoužívajúcich tieto technológie (kontrolná skupina) na vyučovaní. Na základe štatistického skúmania sme zistili, že obe skupiny dosiahli v tomto teste porovnateľné výsledky. Tento fakt však opisujeme ako pozitívum, keďže kontrolná skupina študentov dosiahla vyššiu úspešnosť v prijímacích konaniach, ktoré boli zamerané na vedomosti z anglického jazyka, ale taktiež na matematickú a prírodovednú gramotnosť.

S ohľadom na výsledky prieskumov, ktoré sme realizovali, sa domnievame, že mobilné technológie majú potenciál vo vyučovaní fyziky. Ich používaním sa síce postoj študentov k predmetu fyzika nemení, ale ani sa nezhoršuje, pričom je možné dosiahnuť požadujúce vedomosti. V prípade mobilných technológii ide o využitie pomôcok, ktoré sú dnes už viac-menej bežne dostupné, žiaci ich vlastnia a teda zo strany školy nie sú zvýšené nároky na ich zaobstaranie. Výsledky prieskumov však nie je možné generalizovať hlavne kvôli počtu respondentov a dĺžke experimentálneho zásahu.

Poďakovanie

Tento text vznikol s podporou projektu VEGA 1/0396/18.

L i t e r a t ú r a – R e f e r e n c e s

[1] LORENZ, M.: Kde nechala škola díru: M-learning aneb vzdělání pro záškoláky. In: *ProInflow : Časopis pro informační vědy*. Brno: Kabinet informačních studií a knihovníctví. 2010. s. 53-75. ISSN 1804-2406.

[2] GOYAL CHIN, A. et. al.: On Mobile device Security Practices and Training Efficacy: An Empirical Study. In: *Informatics in Education.Vilnius University*. 2016. s. 235-252. ISSN: 2335-8971. [online]. [cit. 08-03-2018.] Dostupné na: https://www.mii.lt/informatics_in_education/pdf/infedu.2016.12.pdf

[3] JABBOUR, K. K.: An analysis of the effect of mobile learning on Lebanese higher education. In: *Informatics in Education Vilnius University*. 2014. s. 1-15. ISSN: 2335-8971. online]. [cit. 08-

03-2018]. Dostupné na:
https://www.mii.lt/informatics_in_education/pdf/INFE230.pdf

[4] MARPADGA, A.: *Benefits and Limitations of Mobile learning*. [online]. [cit. 01-02-2017]. Dostupné na: http://blog.commlabindia.com/elearning-development/mlearning-benefits-limitations

[5] VILKONIS, R. et. al.: Readiness of Adults to Learn Using E-learning, M-learning and T-learning Technologies. In: *Informatics in education Vilnius University*. 2013. s. 181-190. ISSN: 2335-8971. [online]. [cit. 08-03-2018]. Dostupné na:
https://www.mii.lt/informatics_in_education/pdf/INFE223.pdf

[6] HERRINGTON, J. et. al.: *New technologies, new pedagogies: Mobile learning in higher education*. Wollongong: University of Wollongong. 2009. s. 138. ISBN 978-1-74128-169-9.

[7] KEARNEY, M. et. al.: *Viewing mobile learning from a pedagogical perspective* [online]. [cit. 01-02-2017]. Dostupné na: https://goo.gl/eytKk1

[8] ŠISKOVÁ, J.: *Metodika prípravy na maturitu z informatiky*. Dizertačná práca. Bratislava: FMFI UK, 2012. s. 107.

[9] ANDERSON, T., SHATTUCK, J.: Design-Based Research: A Decade of Progress id Education Research. In: *Educational Researcher*. 2012. s. 16-25. [online]. Dostupné na:
https://goo.gl/Oqk82b

[10] KALAŠ, I.: Pedagogický výskum v informatike a informatizácii (2. časť) In: *Didinfo 2009*. Banská Bystrica : Univerzita Mateja Bela, 2009. s. 15-24. ISBN 978-80-8083-720-4.

[11] LAPITKOVÁ, V. et. al.: *Spôsobilosti vedeckej práce v prírodovednom vzdelávaní*. Bratislava: Knižničné a edičné centrum FMFI UK, 2015, s. 161. ISBN 978-8147-048-6.

[12] FLAVIN, M.: Technology-enhanced learning and higher education. In: *Oxford Review of Economic Policy*, Volume 32, Number 4. 2016. s. 632-645. [online] Dostupné na:
https://doi.org/10.1093/oxrep/grw028

[13] VANKÚŠ, P. *Zisťovanie efektívnosti vyučovacích metód.* Bratislava: KEC FMFI UK, 2014. s.155. ISBN: 978-80-8147-024-0.

[14] VANKÚŠ, P., KUBICOVÁ, E.: Postoje žiakov 5. a 9. ročníka ZŠ k matematike. In: *Acta mathematica 13*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2010. s. 277-281.
ISBN: 978-80-8094-781-1.

Adresa autorov: Jakub Čevajka, Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky,
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava IV,
e-mail: cevajka@fmph.uniba.sk
Klára Velmovská, Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky,
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava IV,
e-mail: velmovska@fmph.uniba.sk

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2021 (50)

INFORMÁCIE

POZVÁNKA – XLIV. Vanovičove dni

posledný augostový týždeň 2021 – Gymnázium Kysucké Nové Mesto

VANOVIČOVE DNI je názov celoslovenského seminára pre učiteľov fyziky základných a stredných škôl. Jeho história siaha do roku 1967, kedy sa na Martinskom gymnáziu, pri príležitosti 100. výročia vzniku gymnázia, z iniciatívy učiteľov fyziky konalo prvé stretnutie učiteľov fyziky s cieľom vzájomne sa obohatiť a podeliť o skúsenosti z vyučovania fyziky.

Toto stretnutie sa stalo pravidelným, a neskôr bolo pomenované *Vanovičove dni* – na počesť martinského rodáka profesora Jána Vanoviča.

V súčasnosti sú organizátori Vanovičových dní Gymnázium Viliama Paulinyho-Tótha v Martine, Jednota slovenských matematikov a fyzikov, Slovenská fyzikálna spoločnosť a gymnázium alebo iná stredná škola na Slovensku, kde sa seminár v danom roku koná.

Preferované témy stretnutí sú:

– odborné prednášky pre učiteľov fyziky zamerané na aplikovanie fyzikálnych poznatkov v praxi,

– prezentácia zaujímavých experimentov, inovatívnych vyučovacích metód a postupov, ktoré motivujú žiakov k štúdiu fyziky,

– vzájomná výmena skúseností s realizáciou školských vzdelávacích programov pre fyziku pre gymnáziá, stredné a základné školy,

– vzájomná výmena skúseností o on-line vzdelávaní.

XLIII. Vanovičove dni

Ostatné XLIII. Vanovičove dni sa konali v dňoch 26.-28. augusta 2020 na Gymnáziu Krompachy.

Stručný výber z programu:

- *Binárne premenné hviezdy* – prof. RNDR. Juraj Slabeycius, CSc. KU Ružomberok,
- *Využitie platformy Arduino vo fyzikálnych experimentoch* – doc. RNDr. František Kundracik, PhD., FMFI UK Bratislava, Katedra experimentálnej fyziky,
- *Kultúrne dejiny fyziky* – doc. RNDr. Aba Teleki, Phd., Mgr. Boris Lacsný, PhD. Phys4U, Nitra,

- *Terénne experimenty vo vyučovaní na Gymnáziu v Modre* – Mgr. Jozef Trenčan, Gymnázium Karola Štúra v Modre,
- *Skúsenosti s online vzdelávaním* – PaedDr. Peter Horváth, PhD., Bilingválne gymnázium C.S. Lewisa Bratislava, PaedDr. Jozef Beňuška, PhD. Gymnázium Viliama Paulinyho-Tótha v Martine, RNDr. Jana Beňušková, Gymnázium Viliama Paulinyho-Tótha v Martine.

Dielne, na ktorých si účastníci vyskúšali rozličné experimenty a aktivity:

- *Odpor nemusí byť odporný* – doc. RNDr. Klára Velmovská, PhD., FMFI UK Bratislava, KDMFI,
- *Využitie platformy Arduino vo fyzikálnych experimentoch* – doc. RNDr. František Kundracik, PhD., FMFI UK Bratislava, Katedra experimentálnej fyziky,
- *Rozmýšľajme pri experimentoch* – PaedDr. Jozef Beňuška, PhD., Gymnázium Viliama Paulinyho-Tótha v Martine,
- *Fyzika a Geogebra* – Mgr. Adriana Macková, Gymnázium A. Bernoláka Senec,
- *Meriame so smartfónmi – aktivity a pracovné listy* – PaedDr. Jakub Čevajka, FMFI UK v Bratislave.

Obr. 1: *Meranie so smartfonmi. Jedna skupina učiteľov skúma pripravené experimenty.*

Jedno popoludnie bolo venované outdoorovým aktivitám. Vykonala sa návšteva Aerologického a radiačného centra SHMÚ v Gánovciach s pútavou prednáškou Mgr. Anny Pribullovej PhD. Zážitok z návštevy umocnilo vypustenie meteorologickej rádiosondy.

Obr. 2: *Kultúrne dejiny fyziky. Prečo nie sú zábery z programu Apollo podvrhom. O podobnosti fyzikálnych systémov – múka, kakao, guľôčka – natočte si dopad asteroidu vykynožiaceho dinosaury smartfonom, a pozorujte pohyby pôdy spomalené do reálneho časového priebehu.*

Nádherné počasie umožnilo dokonale vychutnať priestory Spišskej kapituly a expozíciu Spišského hradu.

Jozef Beňuška[1]

> *„Kdekoľvek sa Vanovičove dni konajú, sú zárukou vysokej kvality. Napriek tomu, že účastníkom negarantujú žiadne kredity, učiteľom odovzdávajú svoje skúsenosti naslovovzatí a osvedčení odborníci z praxe. Učitelia aj v čase prázdnin seriózne pracujú – sú na prednáškach, pracujú na dielňach, ako žiaci – o vyučovaní horlivo diskutujú i počas prestávky na kávu. Stalo sa dobrou tradíciou, že do programu seminára je zaradené i poznávanie lokality. Mám za sebou už vyše tridsať rokov praxe, zúčastnila som sa mnohých ročníkov Vanovičových dní a v porovnaní s mnohými vzdelávaniami, ktoré som počas svojej praxe absolvovala, môžem smelo konštatovať, že Vanovičove dni poskytujú učiteľom jednak odborné poznatky z praxe, a pre prax i motiváciu. Chodia sem učitelia pre inšpiráciu a námety ako učiť, či pre hotové použiteľné vyučovacie materiály. Neformálnosť, priateľská atmosféra, ochota podeliť sa so skúsenosťami, hľadanie nových riešení v problémoch, ktoré prináša meniaca sa doba, robí toto podujatie takým, aké učitelia potrebujú pri výkone svojho povolania.“*

---

[1] PaedDr. Jozef Beňuška, PhD. Gymnázium Viliama Paulinyho-Tótha v Martine, predseda organizačného výboru; **e-mail:** jbenuska@nextra.sk

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2021 (50)

JUBILEUM

Dvaja matematici – deväťdesiatnici

Autor týchto riadkov v roku 1972 nastúpil ako interný ašpirant na vtedajší Ústav teórie merania SAV, dnešný Ústav merania SAV. V tom čase tam existovalo Oddelenie matematických a štatistických metód v meraní, ktoré viedol Dr. Lubomír Kubáček, CSc., a ktorý autora učil aj na vysokej škole. A až tu som sa dozvedel, že Dr. Kubáček je pôvodne vyučený zememerač, ktorý sa stal významným slovenským štatistikom. V tomto oddelení pod jeho vedením vyrástlo množstvo vynikajúcich matematikov, ktorí sa stali ozdobou slovenského matematického stavu. Mená ako prof. Ing. RNDr. L. Kubáček, DrSc. Dr.h.c., prof. RNDr. A. Pázman, DrSc., doc. RNDr. S. Pulmannová, DrSc., prof. RNDr. G. Wimmer, DrSc., doc. RNDr. F. Štulajter, CSc., doc. RNDr. F. Rublík, CSc., prof. RNDr. J. Volaufová, CSc., doc. RNDr. V. Witkovský, CSc. dávno prekročili

Prof. Ing. RNDr. L. Kubáček, DrSc. Dr.h.c. (vľavo) a prof. G.A. Ososkov, DrSc. (vpravo)
na konferencii PROBASTAT 2011, Smolenice.

hranice Slovenska. Sám autor pracoval na ústave skoro 15 rokov, keď v roku 1987 prešiel na Matematický ústav SAV, kde už pracovali Dr. L. Kubáček, Dr. A. Pázman a Dr. S. Pulmannová.

Na Ústave merania SAV v druhej polovici 60. rokov vznikla tradícia spolupráce s Laboratóriom výpočtovej techniky a automatizácie Spojeného ústavu jadrových výskumov v Dubne, pri Moskve. Prvým protagonistom sa stal Dr. Pázman, ktorý v LVTA pracoval v rokoch 1966–1969. Odborníkom v LVTA, s ktorým sa začalo spolupracovať, bol Dr. Gennadij Aleksejevič Ososkov. Autor týchto riadkov nadviazal na túto spoluprácu a v prvej polovici 80. rokov strávil v LVTA šesť rokov v skupine Dr. G.A. Ososkova.

Tieto dve osoby, ***prof. Ing. RNDr. L. Kubáček, DrSc. Dr.h.c.*** a ***prof. G.A. Ososkov, DrSc.***, práve začiatkom februára 2021 v rozpätí necelých dvoch týždňov slávia v plnej duševnej sile významné životné jubileum – 90 rokov.

Starší z tejto dvojice je ***prof. Ing. RNDr. L. Kubáček, DrSc. Dr.h.c.***, ktorý sa narodil 1. februára v Bratislave. Po absolvovaní štúdia geodézie na Fakulte stavebného a zememeračského inžinierstva SVŠT začal pracovať v Geodetickom ústave v Bratislave. V rokoch 1957–1964 si doplnil matematické vzdelanie štúdiom matematickej analýzy a matematickej štatistiky na Prírodovedeckej fakulte UK v Bratislave. Na vtedajšom Ústave teórie merania SAV sa začali venovať aj teórii merania, preto RNDr. Ing. J. Bolf, CSc., bývalý zástupca riaditeľa, ktorý sám bol aj zememeračom, pozval v roku 1962 na ÚTM SAV Ing. Kubáčka, aby založil Oddelenie matematicko-štatistických metód merania. Jemu ako zememeračovi bolo jasné, že teóriu merania možno robiť len na základe matematicko-štatistických metód, preto sa Ing. Kubáček s vervou púšťa do rozvoja tohto oddelenia, a tým dáva hlboké základy rozvoja slovenskej štatistiky. Oddeleniu matematicko-štatistických metód merania na Ústave teórie merania SAV sa venoval celou svojou dušou a celým svojim srdcom. Podarilo sa mu sústrediť okolo seba mladých kolegov, ktorí sú dnes ozdobou matematického cechu nielen na Slovensku, ale aj v zahraničí. Nie nadarmo RNDr. K. Karovič, DrSc., bývalý riaditeľ Ústavu merania SAV, hovorieval, že to najlepšie v Akadémii pochádza z Ústavu merania.

L. Kubáček v roku 1965 obhájil hodnosť CSc., hodnosť DrSc. získal v roku 1980 na SVŠT. V roku 1987 sa stal členom korešpondentom SAV, v roku 1989 členom korešpondentom ČSAV, profesorom v roku 1991 na MFF UK, v roku 2002 mu bol udelený titul Dr.h.c. na Stavebnej fakulte STU v Bratislave, čestným členom Učenej spoločnosti SAV sa stal v roku 2005. V roku 1981 prešiel pracovať na Matematický ústav SAV, kde bol v rokoch 1988–1992 riaditeľom ústavu. V roku 1994 odchádza pracovať na Prírodovedeckú fakultu Palackého univerzity v Olomouci, kde pracoval až do svojho dôchodku v roku 2013, kedy sa vracia do Bratislavy a žije v rodine svojho syna.

Prof. Kubáček patrí medzi najvýznamnejších slovenských, českých a aj československých štatistikov ako aj matematických geodetov. Na pôvodnom pracovisku ešte v 70. rokoch spolu založil konferenciu PROBASTAT, ktorá sa rokmi stala vyhľadávaným fórom pre odborníkov v teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky a koná sa už desaťročia na zámku v Smoleniciach.

Svoje teoretické výsledky úspešne aplikoval aj v praxi, napr. pri stavbe Nového mostu v Bratislave, stavbe metra v Prahe, ako aj pri prípravách stavby metra v Bratislave v 80. rokoch. Veľmi aktívne spolupracoval aj s lekármi, kde sa svojimi štatistickým postupmi snažil nájsť cielené metódy liečenia pacienta. A opačne, zo spolupráce s praxou získaval cenné impulzy pre teoretické výskumy. Jeho meno sa skvie na 7 monografiách a 130 článkoch, vyškolil viac ako 18 doktorandov.

Počas dubčekovskej jari získal aj prestížne štipendium Alexandra von Humboldta, na ktoré však mohol nastúpiť až po spoločensko-ekonomických zmenách v 90. rokoch. Mal šťastie aj na významného spolupracovníka, svoju manželku, doc. Ing. RNDr. Ludmilu Kubáčkovu, DrSc. (1934–2004), s ktorou napísal množstvo spoločných vedeckých prác.

Mladší zo spomínanej dvojice, ***prof. Gennadij Alexejevič Ososkov, DrSc.***, sa narodil 13. februára v meste Viatka, dnes Kirov, Rusko. Je to významný vedúci vedecký pracovník Laboratória informačných technológií (bývalé LVTA) Spojeného ústavu jadrových výskumov, Dubna, Ruská federácia. Po skončení štúdia na MGU v Moskve v roku 1953, bol interným ašpirantom najprv u akademika A.J. Chinčina a po jeho ochorení u akad. A.N. Kolmogorova. Je len málo štatistikov na svete, ktorí sa môžu pochváliť, že ich školiteľmi boli najväčší koryfejovia teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky. Hodnosť CSc. získal v roku 1957 na MGU, DrSc. získal v roku 1987 na SÚJV v Dubne, v roku 1991 sa stal profesorom. Dlhé roky bol univerzitným profesorom na Ivanovskej štátnej univerzite a od roku 2000 je profesorom na Medzinárodnej univerzite v Dubne. Po ukončení ašpirantúry prof. Ososkov pracoval vo Výskumnom ústave pre špeciálny elektrotechnický priemysel v Moskve. V roku 1961 začal pracovať v SÚJV, Dubna, kde pracuje dodnes, čo znamená 60 rokov vedeckej práce v SÚJV. Najprv ako vedúci skupiny a od roku 1966 ako vedúci sektora v Laboratóriu výpočtovej techniky a automatizácie SÚJV.

Okruh odborných záujmov prof. G.A. Ososkova je neobyčajne široký. Už ako ašpirant prof. Ososkov získal cenné výsledky z oblasti limitných viet teórie hromadnej obsluhy. Patria sem problémy modelovania fyzikálnych procesov v experimentálnej fyzike vysokých i nízkych energií, rozpracovanie matematického zabezpečenia pre automatizovaný systémy merania a štatistickej analýzy experimentálnych údajov. Výsledky získané v rokoch 1961–87 z tejto oblasti boli použité pri skenujúcom systéme Spriral Reader v CERNe, pri špirálovom meracom prístroji AELT-2/160 v SÚJV, pri prehliadacích stoloch typu BPS-2 v SÚJV.

V posledných rokoch rozvoj jadrovej fyziky priniesol nové metódy merania v experimentálnej fyzike a urýchľovačoch ťažkých iónov, ako aj nové elektrónne detektory. Tým pádom sa vedecké záujmy prof. Ososkova začali orientovať týmto smerom. Boli potrebné rýchle a vysoko efektívne metódy rozpoznávania stôp čerenkovského žiarenia a stredov elektrónnych lejakov. Tieto metódy boli rozpracované pod jeho vedením na báze širokého použitia robustných odhadov hľadaných parametrov, s použitím bunečných automatov na filtráciu pôvodných údajov pri registrácii trekových častíc. Originálne výsledky sa podarili aj pri použití waveletovej analýzy a boli použité na domácich ako aj zahraničných zariadeniach, napr. HYPERON, ARES, CERES, STAR, HERA-B a iných. Mnohé matematické výsledky našli použitie aj pri analýze údajov z iných typov merania, ako napr. sondovanie ionosféry, lekárskej a biologickej informácie.

Svoje výsledky neraz prezentoval na popredných vedeckých fórach, kam ho často pozývali hlavne po otvorení hraníc, napr. do CERNu, ústavov MPG, DESY, USA – Yalova univerzita, Alabamská univerzita, Floridská univerzita a i. Jeho meno sa skvie na troch stovkách pôvodných vedeckých prácach majúcich početné citácie. Okrem vedeckej práce sa Gennadij Alexejevič venoval aj pedagogickej práci. Vyškolil 13 ašpirantov-doktorandov a dlhé roky prednáša na univerzite v Dubne a na Ivankovskej univerzite. Vydal 4 vysokoškolské učebnice.

Po príchode na LVTA SÚJV sa začala spolupráca prof. Ososkova s pracovníkmi SAV, konkrétne s vtedajším Ústavom teórie merania SAV, ktorú výdatne podporoval Dr. Kubáček. Postupne spolupracovali s prof. Ososkovom mnohí pracovníci ÚTM SAV – prof. RNDr. A. Pázman, DrSc., ktorý sa tam začal venovať štatistickému návrhu experimentu. Potom prišiel prof. RNDr. I. Bajla, CSc., autor, Ing. M. Turzová, ktorí tam boli na dlhodobých pracovných pobytoch. Na krátkodobých pobytoch tam boli doc. RNDr. K. Nemoga, CSc. z MÚ SAV, prof. RNDr. M. Vajteršic, DrSc. a doc. RNDr. L. Halada, CSc. z ÚTK SAV a iní. Neskoršie sa spolupráca rozšírila aj na pracovníkov MFF UK. Všetci jeho bývalí slovenskí spolupracovníci si dodnes vysoko cenia nielen jeho vedeckú erudíciu, ale aj jeho vysoko ľudský prístup. V roku 1991 mu bola udelená Strieborná medaila SAV a v roku 2011 Zlatá medaila SAV.

Je pozoruhodné a potešiteľné, že títo dvaja významní matematici, skoro dvojičky, sa dožívajú v týchto dňoch významného životného jubilea 90 rokov. Obaja vyorali hlbokú brázdu na poli slovenskej matematiky a matematickej štatistiky. Obaja sú spojení pupočnou šnúrou s Ústavom merania SAV, Matematickým ústavom SAV a LVTA-LIT SÚJV. Veľa slovenských matematikov je povďačných obom za svoj rozvoj a za možnosť pracovať pod ich vedením. Preto mi dovoľte, obaja páni Matematici, aby som Vám v mene celej slovenskej matematickej občiny ako aj vo svojom mene poďakoval za Váš vklad, pomoc pri rozvoji matematiky a štatistiky na Slovensku a poprial Vám veľa šťastných chvíľ v rámci rodiny, kolegov, hlavne mnoho zdravia a už teraz sa tešíme na Vaše ďalšie matematické výsledky.

Ad multos annos!

Anatolij Dvurečenskij[2]

[2] Matematický ústav SAV, Štefánikova 49, 814 73 Bratislava; **e-mail**: dvurecenskij@mat.savba.sk

Najdôležitejšie talenty človeka

Rozhovor s jubilantom prof. G.A. Ososkovom, DrSc. pri príležitosti jeho 90-tky[3]

Len veľmi málo ľuďom sa podarí prežiť až 90 rokov a len pár jednotlivcov dosiahne tento vek vo vynikajúcej fyzickej a intelektuálnej kondícii. Tieto jedinečné osobnosti vlastnia, pravdepodobne, akési „tajomstvo dlhovekosti". Oslovili sme vedúceho vedeckého pracovníka Spojeného ústavu pre jadrový výskum (SÚJV), profesora Gennadija Alexejeviča Ososkova a požiadali sme ho, aby sa s nami podelil so svojimi úvahami pri príležitosti 90-ročného jubilea, ktoré oslávil 13. februára tohto roku. Nasleduje to, o čom nám porozprával.

Prežil som dlhý život. Moji rodičia Alexej Vasiljevič a Anna Izmajlovna sa narodili na začiatku 20. storočia. Moji učitelia na škole a univerzite, ktorí sa tak veľmi zaslúžili o sformovanie mojej osobnosti, sa narodili v 19. storočí. Videl som, ako sa menila krajina, menili sa ľudia, menil sa život. Prežil som vojnu. Bol som na Stalinovom pohrebe. Prežil som veľa slávnych ľudí, aj mnohých svojich blízkych priateľov. V Dubne som na tom istom pracovisku strávil 60 z mojich 90 rokov (aj keď za tie roky sa vystriedalo 8 riaditeľov v oddeleniach, kde som pracoval). Veľa som cestoval po našej krajine a po celom svete. Tento rok uplynie 67 rokov šťastného rodinného života s mojou milovanou manželkou Innou, máme dvoch synov, štyri vnúčatá a tri pravnúčatá, najstarší má už 17 rokov.

Učenie sa nekončí

Keď sa ma ľudia pýtajú, čo som v živote dosiahol a ako sa to stalo, začnem rozprávať o učňovstve. To v mojom veku nie je vôbec čudné. Učenie sa nikdy nekončí. Ak človek stratí chuť a schopnosť spoznávať nepoznané, stane sa neschopným usilovať sa o osvojovanie poznatkov a buduje nové iba na predchádzajúcich znalostiach a intuícii, to znamená, že stráca najdôležitejšie ľudské poslanie: byť tvorcom a spoznávať pravdu.

Preto sa nikdy nevyčerpá môj pocit vďačnosti voči Učiteľom, ktorí ma naučili premýšľať a rozprávať súvisle a logicky, naočkovali mi chuť poznávať, schopnosť

---

[3] Originál článku vyšiel 17. 2. 2021 v ruštine v časopise Площадь Мира (Mierové námestie) pod názvom „Главное призвание человека" a je dostupný na stránke
http://pressdubna.ru/news_full_pm.php?nid=26891.
Rozhovor so súhlasom G.A. Ososkova a redakcie časopisu Площадь Мира preložil Ján Buša st., LIT SÚJV Dubna, Ruská federácia, e-mail: busaj@jinr.ru

vidieť krásu vedeckých konštrukcií, pomohli mi uplatniť vedecký aparát a dosiahnuť majstrovstvo.

V živote som mal veľké šťastie na učiteľov. Už v škole č. 9 v meste Kolomna (kam sa moji rodičia presťahovali z Mordovie, keď som mal 15 rokov), zohral v celom mojom budúcom živote dôležitú úlohu vplyv vynikajúcich učiteľov: ruského jazyka a literatúry Zinaidy Grigorjevny Jampolskej a matematika Georgija Michajloviča Gorškova, otca slávneho admirála Gorškova. Jampolskaja, deprimovaná mojou negramotnosťou, pozvala mňa a niekoľko ďalších študentov do literárneho krúžku, kde nás naučila logicky myslieť, súvisle sa vyjadrovať, písať sloh na akúkoľvek zrozumiteľnú tému.

Hodiny vynikajúceho učiteľa G.M. Gorškova, ktorý mal v roku 1947 už 74 rokov, nás vtiahli do nového pre mnohých z nás sveta matematiky. On jednoducho nielen formuloval vety, ale aj rozprával, kto ich vymyslel a ako uplatniť túto matematickú myšlienku, často výrazne presahujúc rámec školských osnov. Študentov, ktorí prejavili záujem a schopnosti, nenápadne zapájal do riešenia zložitejších úloh. Vďaka tomu sme vyriešili veľké množstvo úloh pre uchádzačov o štúdium na vysokých školách. Zamiloval som sa do matematiky a rozhodol som sa prihlásiť na Fakultu mechaniky a matematiky Moskovskej štátnej univerzity, kde som ľahko úspešne absolvoval prijímací pohovor pre medailistov.

Aj na univerzite som sa dobre učil, najmä vďaka potrebe pravidelného prerozprávania zmyslu obsahu prednášok susedom na internáte, bývalým účastníkom vojny, ktorí počas vojnových rokov zabudli školskú matematiku. Spomedzi mnohých slávnych profesorov, ktorí v tom čase prednášali na Mechmate, študenti oceňovali A.J. Chinčina. Jeho prednášky o matematickej analýze boli pre nás, prvákov, úžasným vzorom toho, ako sa má prednášať nový vzdelávací materiál tak, aby sa stal pochopiteľným tak z hľadiska prehľadnosti vysvetlení, ako aj logiky jeho prezentácie, ktorá nám poskytovala radosť z porozumenia a niekedy aj schopnosti dovtípiť sa, čo by malo nasledovať ďalej.

Neskôr, v roku 1953, keď som s červeným diplomom (s vyznamenaním) absolvoval štúdium na Moskovskej štátnej univerzite a hlásil som sa na ašpirantúru, som mal veľké obavy, pretože som skúšky musel skladať bez prípravy. Alexander Jakovlevič, ktorý bol vo výberovej komisii, ma povzbudil, pochválil za neštandardné riešenie, trochu mi našepkal, a tak som urobil skúšky. Takže vďaka A.J. Chinčinovi som sa stal ašpirantom, a keď sa začalo hovoriť o školiteľovi, prirodzene som sa poprosil k nemu. Pamätám si, že bol veľmi prekvapený a povedal, že už dávno nemal ašpirantov, ale porozmýšľal a na moje potešenie, súhlasil.

Môj nasledujúci život sa veľmi zmenil. V skutočnosti som sa pod jeho blahodarným vplyvom v podstate zo šedého študenta (hoci jednotkára a športovca) zmenil na mladého vedca, pre ktorého je zaujímavé venovať sa vede, vyznať sa v nových úlohách, hľadať nečakané prístupy a neľutovať čas strávený hľadaním toho najlepšieho z mnohých riešení.

Chinčin na mňa okamžite urobil dojem tým, že ma jednoducho pozval k sebe domov na rozhovor a diskusiu o tom, ktorej z mnohých úloh by bolo pre mňa zaujímavé venovať sa s cieľom napísania dizertačnej práce. Potom sme sa uňho doma stretávali pravidelne každý piatok. Pre mňa boli tieto stretnutia úžasnými lekciami týkajúcimi sa všetkého: vedeckých prístupov v teórii pravdepodobnosti, voľby optimálnych spôsobov riešenia vedeckých problémov a dokonca aj všeobecných otázok morálky, najmä morálnych kritérií správania sa vedcov a ich vzájomných vzťahov. Pod vplyvom Učiteľa, v snahe zaslúžiť si jeho dôveru, som vtedy pracoval veľmi tvrdo, ale s veľkým uspokojením a rýchlo som napredoval: dizertačná práca bola pripravená dlho pred koncom obdobia štúdia v ašpirantúre.

Stalo sa, že A.J. Chinčin ťažko ochorel a požiadal akademika A.N. Kolmogorova, aby mi pomohol s formalitami obhajoby. Andrej Nikolajevič súhlasil a nakoniec v spolupráci so mnou vykonal toho oveľa viac, ako sľúbil. Nielenže mi pomohol napraviť niekoľko dôležitých nedostatkov v mojej dizertačnej práci, ale tiež ma prinútil napísať článok s opisom základných výsledkov. Strávil celý večer sediac vedľa mňa a upravil celý text, ukazujúc mi, ako správne prezentovať obsah vedeckého článku. Aj neskôr sa o mňa neustále staral. Na náklady katedry ma pozval na I. Všezväzovú konferenciu o teórii pravdepodobnosti do Vilniusu, aj na nasledujúcu – do Leningradu. Trval na tom, aby som s výsledkami mojej dizertačnej práce vystúpil na III. Všezväzovom matematickom zjazde. Vďaka tomu som sa v roku 1957, ako 26-ročný, bravúrne obhájil.

Je neprípustné nepodeliť sa

Po dosiahnutí určitej úrovne chápeme, že, po prvé, prijatý dar nie je možné, je neprípustné, nosiť so sebou a nezdieľať ho a, po druhé, že veľká práca sa robí mnohými ľuďmi a vo vede je bez tímov rovnako zmýšľajúcich ľudí a kolegov nemožné dosiahnuť nejaké úspechy.

Začal som vyučovať ešte počas ašpirantúry a s prestávkami, som neskôr prednášal a viedol semináre aj v Moskve, aj v Dubne, kam som sa s rodinou v roku 1961 presťahoval. Bolo zaujímavé vysvetľovať tak, aby mi študenti rozumeli, a vidieť, že počúvajú bez rozptyľovania sa. Moja skutočná vášeň pre výučbu nastala, keď ma môj priateľ Garij Jefimov pozval, aby som sa stal profesorom na Katedre teoretickej fyziky Ivanovskej univerzity, kam som potom 16 rokov cestoval a prednášal predmet „Štatistické modelovanie“ a viedol praktické cvičenia v počítačovej triede, podarovanej univerzite Američanmi. Desiatky študentov z rôznych ročníkov žiadali o účasť na mojich hodinách pre možnosť programovať a riešiť aktuálne úlohy analýzy údajov fyzikálnych experimentov.

Vybral som si tých najšikovnejších z nich, zadával som im témy seminárnych a diplomových prác, privážal som ich na prax do Spoločného ústavu pre jadrový výskum a oni písali vynikajúce diplomové práce. Štyria potom nastúpili na postgraduálne štúdium a svoje dizertačné práce brilantne obhájili. Získali sme nové výsledky v rôznych oblastiach aplikovanej matematiky a niektoré publikácie týchto výsledkov z prvých rokov 20. storočia sú stále citované vo vedeckej literatúre. Keď sa moje pôsobenie na Ivanovskej univerzite skončilo, pokračoval som vo výučbe v dubnenskej pobočke Ruskej technologickej univerzity MIREA, a potom až dodnes na univerzite „Dubna".

Vedecká škola

Moja súčasná pozícia vedúci vedecký pracovník nezahŕňa administratívne funkcie, nemám podriadených, napriek tomu sa akosi stalo, že okolo mňa je vždy skupina mladých ľudí, ktorí majú záujem so mnou pracovať.
Jasne vidím úlohy, ktoré sú pre náš ústav dôležité, a mám približnú predstavu o spôsobe ich riešenia. Nové metódy aplikovanej a výpočtovej matematiky priťahujú mladých ľudí, ak im vysvetlíte, aké je to dôležité a zaujímavé. Moji mladí kolegovia sa so mnou radia, vypytujú sa ma a vždy sa škriepia, ak si myslia, že je ich prístup lepší a spolu spravidla nachádzame správnu cestu k úspechu.

Vedecká škola je základom prosperity vedy a jej rozvoja. A je veľmi bolestivé sledovať, ako sa prerušuje spojenie časov, keď najlepší a najschopnejší študenti odchádzajú za zárobkom do iného mesta alebo do krajiny „diaľava" a tam premrhajú alebo pochovajú bohatstvo svojho talentu. Vďaka Bohu, že stále existujú tí, ktorí nepodľahnú pokušeniam a zostanú verní svojmu vedeckému poslaniu.

Moja rodina

Podotknem, že existuje ešte jeden dôvod mojej dlhovekosti, vrátane tvorivej moja rodina. Pamätám si: keď som sa oženil v roku 1954, povedal som o tejto zmene v mojom živote A. J. Chinčinovi. K tejto udalosti mi nečakane vrúcne zablahoželal slovami: „Teraz môžete byť pokojný pri vašom živote v domácnosti, manželka sa o Vás postará, ľahšie sa Vám bude venovať vede." Úplne opačná bola reakcia A. N. Kolmogorova, ktorého to veľmi znepokojilo: „*Ale nepoponáhľali ste sa, nebudú Vás všetky tieto nové rodinné vzťahy odvádzať od vedy*?" Desaťročia spoločného života s mojou Innou ukázali, že pravdu mal Alexander Jakovlevič.

Ak sa ma opýtajú, čo je tajomstvom šťastného rodinného života, odpoviem iba dvoma slovami LÁSKA a VZÁJOMNOSŤ. Za týmito jednoduchými slovami sa však skrýva veľa. Najdôležitejšia je prítomnosť spoločných záujmov a pozornosť tomu, čo je dôležité pre druhého manžela.

Moja manželka je športovec, vždy bola priekopníčkou rôznych nových rodinných záľub. Celú rodinu postavila na lyže – bežky, zjazdové i vodné. Veľa sme chodili na výlety na kajakoch, vždy s deťmi. Ona, ako milovníčka klasickej hudby, ma od samého začiatku vtiahla do tohto čarovného sveta zvukov a dodnes nevynecháme žiaden koncert v kultúrnom dome „Mier“.

Vždy zdieľame to, čo trápi iného. Moja manželka je humanitného zamerania, ale keď sa v strednom veku predsa len rozhodla obhájiť dizertačnú prácu, bolo pre mňa zaujímavé porozumieť historickým problémom jej práce, pomôcť obsah logicky usporiadať a tiež výrazne skrátiť a spraviť zrozumiteľnejším autoreferát. Na druhej strane, ak sa pýta, čomu sa venujem, snažím sa jej jasne porozprávať o mojich zložitých matematických problémoch. Napríklad, zaujímalo ju dozvedieť sa o umelých neurónových sieťach a ako ich ja a moji študenti používame v SÚJV. A doteraz ju stále prosím o radu, pokiaľ ide o ťažké rozhodnutia, najmä pokiaľ ide o vzťahy s kolegami a študentmi. Samozrejme, veľmi dôležitá je vzájomná trpezlivosť a schopnosť odpúšťať.

V ťažkých chvíľach nás zbližovalo a pomáhalo nám aj to, že sme mali spoločných blízkych priateľov, ktorí nás spájali. Keď som dvakrát odchádzal na dlhodobé služobné cesty do CERNu, priatelia brávali moju manželku s dvomi synmi na leto na vzdialené plavby na kajakoch, kam som im písal, a na prekvapenie všetkých sa k nim pravidelne dostávali moje farebné poštové pohľadnice.

Plnosť života

Nadíde deň, keď sa pominiem. Ale zatiaľ dokážem jasne premýšľať, v hlave mi dozrieva hromada nových projektov, som obklopený talentovanými žiakmi a môžem im veľa odovzdať.

Čas dávať. A kým vládzem, som pripravený podeliť sa so všetkým, čo mám. S nápadmi, vedomosťami, zručnosťami, spomienkami. Som pripravený kritizovať a pomáhať. Pripravený napojiť čajom a počúvať príbehy o životných ťažkostiach. Radiť a ponáhľať sa pomôcť. Toto je plnosť života a záruka tvorivej dlhovekosti.

Od redakcie časopisu Площадь Мира: *Úprimne blahoželáme Gennadijovi Alexejevičovi k nádhernému výročiu! Prajeme mu, aby si ešte dlho zachoval plnosť života a jasnosť myslenia, aby dosiahol nové vedecké úspechy, vychoval ďalšiu generáciu žiakov a zažil narodenie prapravnukov*.

Redakcia Obzorov matematiky, fyziky a informatiky sa pripája ku gratulácii.

Dodatok od prekladateľa

V 1957 G.A. Ososkov obhájil kandidátsku dizertačnú prácu na tému Limitné vety pre toky homogénnych udalostí, kde napr. bola dokázaná limitná veta hovoriaca o univerzálnosti Poissonovského rozdelenia v najrozličnejších aplikáciách v teórii hromadnej obsluhy. V 80. rokoch znalosti z teórie hromadnej obsluhy s nekonečným počtom kanálov pomohli jubilantovi spolu s A. Dvurečenským riešiť aktuálne úlohy súvisiace s počítačmi častíc dôležité pre prax v SÚJV.

O vedeckom živote a tvorivých úspechoch prof. Gennadija Alexejeviča Ososkova, DrSc. je porozprávané v predchádzajúcom článku Dvaja matematici – deväťdesiatnici. Dodávame iba, že pod jeho vedením bolo vyvinutých množstvo programov na modelovanie procesov spracovania toku úloh v distribuovaných a cloudových systémoch, ako aj na analýzu tokov údajov s prihliadnutím na cenové ukazovatele simulovaných systémov, ktoré boli použité na voľbu optimálnych distribuovaných systémov na príjem a ukladanie údajov v laboratóriách SÚJV.

V posledných rokoch sa vedecké záujmy G.A. Ososkova posunuli do oblasti aplikácie umelých neurónových sietí a metód hlbokého učenia na riešenie aktuálnych úloh experimentálnej fyziky, kde bol dosiahnutý celý rad originálnych prístupov k rozpoznávaniu trajektórií nabitých častíc v niekoľkých experimentoch fyziky vysokých energií. Rozsah a efektívnosť prístupov umožnili aj použitie vyvinutých metód na analýzu údajov úplne odlišnej fyzikálnej povahy – na analýzu iónogramov získaných pri rôznych režimoch snímania ionosféry, ako aj analýzu lekárskej a biologickej informácie a tiež vo výskumoch pre ochranu životného prostredia.

Ján Buša st.[4]

[4] LIT SÚJV Dubna, Ruská federácia, **e-mail**: busaj@jinr.ru

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2021 (50)

SPOMÍNAME

Náš Daniel Kluvanec (*1940 –† 2020)

sen.h.c., prof. RNDr. Ing. Daniel Kluvanec, CSc.

Keď mi Martin Kalina navrhol aby som napísal spomienkový článok na Daniela Kluvanca do časopisu Obzory matematiky fyziky a informatiky, ktorý on zakladal, spomenul som si na silný televízny príbeh *Griffin a Phoenix* z roku 1976 s Petrom Falkom a Jill Clayburghovou. Dvaja onkologickí pacienti, ktorí sa zoznámia na prednáške o psychológii umierania, sa zblížia strávia spolu svoj ostávajúci čas. Keď u Sáry vypukne terminálna kríza, stiahne sa do nemocnice a nepraje si, aby ju v jej utrpení Jeff navštevoval, čo on znáša veľmi ťažko. Záverečná epizóda zastihneme Jeffa na cintoríne, kde hľadá Sárin hrob. Objaví pomník, na ňom meno, dátumy a odkaz – *Vitaj, Jeff, myslela som si, že sa tu asi zastavíš.* V hneve a frustrácii zo smrti vyjde Jeff na ulicu a demoluje zaparkované vozidlá...

Vidíš, Daniel, prišiel som aj ja. Miesto demolovania budem však písať o tom, čo si vytvoril a zanechal. Príbeh osemdesiatich dokončených a jedného nedokončeného obehu na chrbte Zeme okolo Slnka začal v roku 1940 v Nevidzanoch v okrese Prievidza. Po získaní základného vzdelania sa Daniel Kluvanec vybral do sveta, ale nedošiel ďaleko. Vtedy sa ďaleko nechodilo. Svoje životné pôsobenie spojil s Nitrou, s mestom, v ktorom sa pretínajú tri línie – naša história, kresťanstvo a náš chlieb každodenný. Predtým získal vzdelanie v didaktike fyziky a matematiky a na dôvažok vo fyzike tuhých látok na Elektrotechnickej fakulte SVST u Júliusa Krempaského. Krempaský zanechal dve vedecké školy – polovodiče a termofyzikálne vlastnosti materiálov. Tu sa naše cesty na čas rozišli, ja som sa vybral po prvej z nich, D. Kluvanec po druhej.

Neskôr z toho rezultovalo spoločné laboratórium tepelných vlastností materiálov Katedry fyziky Pedagogickej fakulty v Nitre a Elektroporcelánu Čab.

Pedagogická fakulta bola však iba jednou zastávkou postupného vývoja Pedagogického inštitútu na dnešnú Univerzitu Konštantína Filozofa v Nitre, na ktorom sa Daniel Kluvanec podieľal. Počas týchto metamorfóz zastával 6 rokov funkciu dekana a 10 rokov rektora, 17 rokov bol vedúcim katedry fyziky, 35 rokov pôsobil v časopise, 60 rokov bol učiteľom a výskumníkom, z toho 21 rokov profesorom. Bol aj viceprezidentom Slovenskej rektorskej konferencie, predsedom pobočky JSMF v Nitre a mnohoročným *nehrajúcim kapitánom* národných reprezentácií na medzinárodných fyzikálnych olympiádach. Keď si tieto čísla spočítame, vydajú za tri profesionálne životy. Ak sa teda v zdraviciach a spomienkach na prof. Kluvanca objavuje „veľká pracovitosť“, autori nepreháňajú. Skôr sa miernia.

Prof. Kluvanec bol vedúcou osobnosťou v našej vede a fyzike. Štandardný vodca býva rázny, žoviálny, primerane hlučný a egocentrický, vždy pripravený dať k dobru nejaký banálny vtip. Tento vzorec neplatí pre Daniela Kluvanca, ktorý bol rezervovaný a láskavý altruista, arbiter slušného správania. Ako je to možné? Hovorí sa, že vedúci musí robiť nielen správne veci, ale aj robiť veci správne. A pokiaľ ide o humor D. Kluvanca, ten bol svojrázny. Trefné poznámky vyvolávali smiech a on akoby sa tomu čudoval. „Tak tie prvomájové veci máme za sebou“ konštatoval na konferencii o znalostnej spoločnosti potom, ako minister školstva prečítal svoj príhovor a s mobilom na uchu sa odporúčal. Vstúpil aj na pole veľkej politiky. „Spojené štáty americké komplikujú život našim študijným referentkám“, posťažoval sa na otvorení akademického roka 2003. Išlo o to, že takmer tisíc študentov UKF požiadalo o odklad zápisu pre pobyty v zahraničí, najmä v USA. Na druhej strane, je to v poriadku, lebo veď „Európska únia nie je donáškou do domu“.

Spomínam na pôsobivé akademické slávnosti vo veľkej aule univerzity v réžii rektora. Prichádza na záver za zvukov staroslovienskeho Otčenáša, ktorý nám pripomína našich vierozvestcov. Talár je nevýstredný, líšky a činčily zaň nepoložili životy. V hľadisku sedia učitelia, študenti, fyzici, archeológovia – svedkovia nitrianskej histórie a ďalší predstavitelia študijných odborov, nechýba rektor Slovenskej poľnohospodárskej univerzity – jej areál leží šikmo cez ulicu. Tu sa napĺňa trojjediné poslanie Nitry spomenuté skôr. Ale v Nitre mali aj kardinála Korca a predsedu Národnej rady SR P. Hrušovského. Aj oni sa radi zúčastnili. Akademickí funkcionári referujú, ako sa univerzite darí, prípadne aj nedarí. Pomáhajú *urbi et orbi*. Začlenenie univerzity do života mesta prinieslo D. Kluvancovi čestné občianstvo. Je to však iba jedno z početných vyznamenaní, ktoré azda netreba znova rekapitulovať. Ale predsa – sú medzi nimi aj tri medaily a ceny SAV, a to napriek tomu, že ako správna slovenská inštitúcia SAV tiež uprednostňuje svojich pred cudzími.

Za čo prof. RNDr. Ing. Daniel Kluvanec, CSc., senátor h. c. Univerzity v Segedíne tieto pocty dostal? Okrem zrejmých organizačných úspechov tu bola starostlivosť o talentovaných študentov, kreatívne vyučovanie fyziky, zbierky vtipných úloh a príkladov, ktoré nie vždy dokážu vyriešiť aj učitelia fyziky, a tiež za to, že vydal 65 učebníc, metodických príručiek v slovenčine, češtine i maďarčine, napísal takmer stovku vedeckých a výskumných prác. Svoju univerzitu duchovne i materiálne pozdvihol, ale nešetril úsilím ani v prospech celej pedagogickej a vedeckej komunity,

Tým by som zakončil svoje spomienky, ktoré sú trvalé a milé. Kolegovia sa ma občas pýtali, prečo som v trilógii *Moji intelektuáli* o svojich hrdinoch, medzi ktorých patril aj Daniel Kluvanec, písal iba pozitívne. Nuž, priatelia, veď ani Mozart neskladal škaredú hudbu. A ak by sa do môjho pera niekedy natiahlo trochu blenu, v tomto prípade to neprichádza do úvahy.

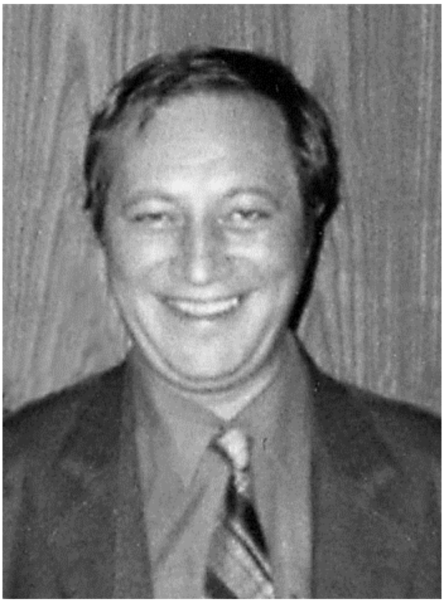
Štefan Luby[5]

[5] prof. Ing. Štefan Luby, DrSc., Fyzikálny ústav SAV; Dúbravská cesta 9, 845 11 Bratislava 45;
e-mail: stefan.luby@savba.sk

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2021 (50)

Doc. RNDr. Ondrej Kováčik, CSc.

(1953-2020)



Doc. RNDr. Ondrej Kováčik, CSc.

Dňa 20. 11. 2020 sme sa navždy rozlúčili s kolegom, – ktorého sme, viacerí z nás, viac ako štyri desaťročia poznali, spolupracovali sme s ním a priatelili sme sa s ním – s docentom Ondrejom Kováčikom. Do matematického neba odišiel dňa 14. 11. 2020.

Ondrej Kováčik sa narodil 4. septembra 1953 v Brne. Základnú a strednú školu absolvoval v Banskej Bystrici. Po maturite na gymnáziu študoval v rokoch 1972 až 1977 matematiku na Mechanicko-matematickej fakulte Odesskej štátnej univerzity I. I. Mečnikova v Odesse. Po úspešnom ukončení tohto štúdia bol prijatý v auguste 1977 na miesto asistenta na Katedru matematiky a deskriptívnej geometrie Fakulty prevádzky a ekonomiky dopravy (PED) vtedajšej Vysokej školy dopravnej v Žiline. Od septembra 1977 však vykonával ročnú základnú vojenskú službu v Prahe. Už tam nadviazal spoluprácu s českými matematikmi pôsobiacimi na vtedajšej ČSAV. Z tejto spolupráce vzniklo niekoľko významných vedeckých publikácií, na základe ktorých roku 1983 obhájil na Karlovej univerzite v Prahe rigoróznu prácu a získal titul RNDr. v odbore *matematická analýza*. Pod vedením svojho školiteľa profesora Aloisa Kufnera, neskoršieho riaditeľa Matematického ústavu ČSAV obhájil roku 1988 kandidátsku dizertačnú prácu tiež z matematickej analýzy a stal sa kandidátom vied. Netrvalo dlho a po piatich rokoch, roku 1993, sa habilitoval v odbore matematika na Strojníckej fakulte Žilinskej univerzity, a stal sa docentom.

Toto obdobie bolo pre vedeckú prácu Ondreja Kováčika veľmi plodné, čo zviditeľňuje aj jeho článok [4] uverejnený roku 1991, v spoluautorstve s českým kolegom, v časopise Czechoslovak Mathematical Journal, na ktorý je k dnešnému dňu viac ako 1300 citácií v databáze Web of Science. Za tieto citácie bol roku

2010 ocenený Literárnym fondom *Prémiou za výnimočný vedecký ohlas*, hoci v tom čase bolo tých citácií o polovičku menej. Aj vďaka týmto citáciám sme pre Fakultu humanitných vied Žilinskej univerzity v rámci komplexnej akreditácie za roky 2008-2013 získali hodnotenie A v oblasti výskumu Matematika a štatistika, čo bola vtedy jedna z dvoch A-čkových oblastí výskumu na Žilinskej univerzite.

Smerovanie vedeckej práce Ondreja Kováčika, zamerané na zovšeobecnené funkcionálne priestory a ich aplikácie, predpovedal jeho záujem o túto problematiku už počas štúdia na Odesskej štátnej univerzite, ktoré absolvoval obhajobou diplomovej práce s názvom *„Niektoré otázky vloženia funkcií do tried ohraničenej r-variácie“*. Po vykonaní štátnej skúšky a obhajoby diplomovej práce mu bola priznaná kvalifikácia „matematik, prednášateľ matematiky“. V rigoróznej práci *„Niektoré inklúzie Lebesgueovských priestorov funkcií do priestorov ohraničenej q-variácie“* skúma nutné a postačujúce podmienky na modul spojitosti vo funkcionálnom priestore absolútne integrovateľných funkcií také, že bude platiť inklúzia do priestorov funkcií ohraničenej q-variácie. V jej závere sa O. Kováčik vyznáva k svojmu záujmu o túto problematiku počas vysokoškolského štúdia týmito slovami:

> *„S problematikou predkladanej rigoróznej práce som sa oboznámil ešte za svojho pobytu na Odesskej štátnej univerzite v ZSSR pod vplyvom kolektívu pedagógov katedry matematickej analýzy, keď som mal možnosť prísť do kontaktu s profesorom B. I. Golubovom. Jeho cyklus prednášok o funkciách ohraničenej q-variácie ma inšpiroval k práci s uvedenou problematikou.“*

V kandidátskej dizertačnej práci *„Vlastnosti a aplikácie zovšeobecnených Lebesgueových priestorov“* O. Kováčik v skúmaní tejto problematiky pokračuje a opiera sa už aj o výsledky svojho školiteľa Aloisa Kufnera a ďalších českých matematikov, medzi nimi aj Svatopluka Fučíka, ktorý mal byť pôvodne jeho školiteľom, ale v pomerne mladom veku roku 1979 podľahol ťažkej chorobe. Cieľom tejto práce je skúmanie priestorov $L^{p(x)}\,(\Omega)$ (zovšeobecnené Lebesgueove priestory), $W^{k,p(x)}(\Omega)$ (zovšeobecnené Sobolevove priestory) a $W_0^{k,p(x)}(\Omega)$ (uzáver $W^{k,p(x)}(\Omega)$) a ich aplikácií na riešenie okrajových úloh pre parciálne diferenciálne rovnice s rastovými podmienkami typu „premennej mocniny“. Výsledky dizertácie umožňujú hľadať slabé riešenia okrajových úloh rovníc takéhoto typu. Habilitačná práca už bola samozrejmým vyvrcholením predchádzajúceho snaženia v uvedenej oblasti matematického výskumu.

Celý svoj pracovný život pôsobil Ondrej Kováčik na Žilinskej univerzite v Žiline a na jej predchodkyniach s názvami Vysoká škola dopravná a Vysoká škola dopravy a spojov. Od roku 1991 sa Katedra matematiky Fakulty prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov (PEDAS), na ktorú pôvodne nastúpil, stala súčasťou Stavebnej fakulty, a od roku 1998 súčasťou novozaloženej Fakulty prírodných vied (FPV), ktorá bola roku 2010 premenovaná na Fakultu humanitných vied (FHV). Docent Kováčik počas svojho života učil matematické predmety na všetkých týchto fakultách, teda na fakulte PEDAS, na Stavebnej fakulte, na FPV aj na FHV, ale hlavne na Vojenskej fakulte, neskoršej Fakulte špeciálneho inžinierstva (FŠI), resp. Fakulte bezpečnostného inžinierstva (FBI), ktorá bola jeho srdcovou záležitosťou. Na Stavebnej fakulte vykonával aj funkciu vedúceho katedry a na FPV funkciu prodekana pre vedu. Bol autorom alebo spoluautorom 11 matematických skrípt a asi 60 vedeckých článkov, z ktorých niektoré sú doteraz citované v zahraničí. Bol vedúcim riešiteľom projektov VEGA a KEGA. Niekoľko funkčných období bol aktívnym členom Akademického senátu Žilinskej univerzity. Ako vysokoškolský učiteľ matematiky pracoval až do júna 2013, kedy vážne ochorel, a preto odišiel do invalidného dôchodku a neskôr do starobného dôchodku.

Jeho rodinný život bol poznamenaný viacerými tragédiami a to malo veľký vplyv na jeho psychické zdravie. Napriek tomu bol veselej a slnečnej povahy, stále usmiaty a žartujúci. Matematiku miloval, zapájal sa diskusnými príspevkami do všetkých prednášok, ktoré odzneli na matematických vedeckých seminároch. Tých sa zúčastňoval aj v Prahe na ČSAV, kde navštevoval seminár *Priestory funkcií*, aj v Žiline, kde bol účastníkom *Seminára z ortogonálnych polynómov a ich aplikácií*. Vďaka nemu sme na našom seminári niekoľkokrát privítali profesora Kufnera. V každodennom živote našej katedry matematiky sme obdivovali vynaliezavosť a asertivitu nášho kolegu Ondreja Kováčika. Napríklad štyri diely matematických skrípt, ktoré dodnes používajú študenti technických fakúlt ako zbierky úloh sa nazývajú *Počtovnice pre vysoké školy technické* – tento názov vymyslel on. Ďalším takým príkladom je zborník vedeckých prác nazvaný SOPOA (zborník prác seminára z ortogonálnych polynómov a ich aplikácií) – jeho založenie bolo Ondrejovým nápadom a nakoniec ho od nás žiadali Španieli (jeho článok uverejnený v zborníku aj citovali), aj knižnica v Göttingene. A ešte treba spomenúť netradične napísané miniskriptá s názvom *Minimax z matematiky*, ktorých bol autorom, a ktoré sú učebnicou pre doktorandov technických fakúlt pre predmet aplikovaná matematika. Jeho koníčkom boli aktivity v rámci Zväzu technických činností, kde bol predsedom pobočky na Žilinskej univerzite a nadšeným organizátorom streleckých pretekov. Rozlúčili sme sa teda s vynikajúcim matematikom a s človekom, ktorý mal rád ľudí a oni jeho.

Milý Ondrík, aj keď si odišiel do matematického neba, žilinský matematický svet na Teba nezabudne.

Česť Tvojej pamiatke!

Najvýznamnejšie publikácie O. Kováčika:

[1] Kováčik, O.: *Odno neobchodimoe uslovie vloženija* H_p^{ω} *v prostranstvo funkcij ograničenoj variaciji*, Izvestija vyšších učebnych zavedenij: Matematika, Vol. 27, No.10 (1983), 26-28.
[2] Kováčik, O.: *Nekotoryje svojstva prostranstv* $L^{p(t)}(\Omega)$, Funkcionaľnyje i čislennyje metody matematičeskoj fiziki: sbornik naučnych trudov, Kiev: Naukova Dumka, 1988, 98-100.
[3] Kováčik, O.: *O dvojnych rjadach Furje-Haara*, Izvestija vyšších učebnych zavedenij: Matematika, Vol. 35, No.11 (1991), 36-38.
[4] Kováčik, O., Rákosník, J.: *On Spaces* $L^{p(x)}$ *and* $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Mathematical Journal, 41 (116), no. 4 (1991), 592-618.
[5] Kováčik, O.: *On the embedding* $H^{\omega} \subset V_p$, Mathematica Slovaca, Vol. 43, No. 5 (1993), 573-578.
[6] Kováčik, O., Mamrilla, D.: *On solution in* $L_{loc}^{p}(R^{+})$ *of one type nonlinear differential equation*, Fasciculi Mathematici, 24 (1994), 37-42.
[7] Kováčik, O.: *Gronwall-Bihari type Lemma*, Fasciculi Mathematici, 24 (1994), 77-81.
[8] Kováčik, O.: *On the asymptotic behaviour of a modulus of continuity with discrete description*, Mathematica Slovaca, Vol. 45, No. 1 (1995), 53-56.
[9] Kováčik, O.: *Once more on the double Fourier-Haar series*, Mathematica Slovaca, Vol. 52, No.2 (2002), 215-220.
[10] Kováčik, O.: *On the Lebesgue spaces of bounded q-variation*, Tatra Mountains Mathematical Publications, Real Functions, Part III, Vol. 34 (2006), 189-199.
[11] Kováčik, O., Oršanský, P.: *Partial differential equation for heat conduction and its solvability*, Communications: scientific letters of the University of Žilina, Vol. 12, No. 1 (2010), 20-22.

Mariana Marčoková [6]

[6] Tulská 24/61, 010 08 Žilina **e-mail**: mariana.marcokova@gmail.com

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2021 (50)

Spomienka na pána profesora Pavla Marušiaka

Prof. RNDr. Pavol Marušiak, Dr. Sc.
24.4.1935 – 18.12.2000

V polovici decembra minulého roka uplynulo už neuveriteľných dvadsať rokov odkedy nás neočakávane navždy opustil prof. RNDr. Pavol Marušiak, Dr.Sc. Bez nadsadenia môžem povedať, že rozvoj matematiky na Žilinskej univerzite je neoddeliteľne spätý s jeho menom. Profesor Marušiak bol ochotný urobiť čokoľvek pre to, aby matematika v žilinskej škole bola na vysokej úrovni a celosvetovo uznávaná. V konečnom dôsledku, za túto svoju snahu položil aj život.

Na Žilinskú univerzitu, vtedy Vysokú školu dopravnú, prišiel profesor Marušiak v roku 1962, po tom, čo ako absolvent učiteľstva Fakulty prírodných vied Vysokej školy pedagogickej v Bratislave učil päť rokov matematiku a fyziku na Jedenásťročnej strednej škole v Trstenej na Orave. Bol hrdý na svoje pedagogické vzdelanie a mal rád povolanie učiteľa. Nebyť potreby doplniť chýbajúcich pracovníkov na Vysokej škole dopravnej po jej presťahovaní z Prahy, zrejme by zostal vyučovať na strednej škole. Na vysokej škole mal horšiu východiskovú pozíciu, pretože jeho štúdium na „pajdáku" ho nepripravilo na vedeckú dráhu. Profesor Marušiak si to uvedomoval a s plným nasadením chcel dohnať zameškané. Pracoval každý deň, pracoval cez víkendy, pracoval tiež vo sviatočné dni vo svojej doma zriadenej pracovni, kde ho nikto nerušil. Výsledky jeho húževnatosti nedali na seba dlho čakať. V roku 1970 vykonal rigoróznu skúšku na PF UK v Bratislave, na tom istom pracovisku získal v roku 1970 hodnosť CSc., v roku 1981 bol menovaný docentom a od roku 1989 bol profesorom v odbore matematika. Doktorskú dizertačnú prácu obhájil na Matematicko-fyzikálnej fakulte UK v Bratislave v júni 1994.

Zdalo by sa, že dosiahol vrchol pomyselného matematického kopca a môže vychutnávať slávu. Avšak profesor Marušiak nepatril k ľuďom, ktorí sa niekam vyšplhajú a rebrík vytiahnu za sebou. Práve naopak, profesor Marušiak nielenže ponechal rebrík, aby sa na kopec mohli dostať aj iní, ale chcel vybudovať cestu, aby sa im dohora šlo pohodlnejšie.

Profesor Marušiak bol aktívnym členom Žilinskej pobočky JSMF, kde v roku 1964 vznikol nápad zorganizovať najskôr zimné a neskôr aj letné školy z diferenciálnych rovníc s úmyslom „uviesť do života“ mladých začínajúcich „rovničiarov“. Túto tradíciu založil pán doktor Ladislav Berger za výdatnej pomoci vtedy ešte len začínajúceho odborného asistenta Pavla Marušiaka. Letné školy boli najskôr národnou záležitosťou, keď podstatnú časť prednášok mali vtedy najvýznamnejší odborníci v oblasti diferenciálnych rovníc z Čiech a Slovenska, postupne však prerástli na konferencie s medzinárodnou účasťou a nakoniec na veľké medzinárodné konferencie, ktorých hlavným organizátorom bol profesor Marušiak. Organizáciu svojej poslednej konferencie v roku 2001 už profesor Marušiak nedokončil. Myslím, že by bol hrdý na to, ako sme pokračovali v tradícii a prostredníctvom konferencií žilinská škola z diferenciálnych rovníc získala partnerov v mnohých význačných pracoviskách na celom svete.

Profesor Marušiak sa viac ako dvadsať rokov podieľal a v ostatných rokoch svojho života bol hlavným organizátorom konferencií slovenských matematikov v Jasnej. Bol členom predsedníctva ÚV JSMF i členom výboru SMS, za predsedu ktorého bol zvolený v septembri 2000, avšak funkcie sa už nestihol ujať. Rôznymi funkciami prešiel aj na svojom pracovisku, najskôr ako tajomník katedry, neskôr ako zástupca vedúceho a nakoniec ako vedúci katedry. Pracoval tiež ako vedúci odborového úseku na katedre, neskôr bol vo funkcii predsedu odborovej organizácie na vtedajšej Vysokej škole dopravy a spojov.

Činnosť v rôznych funkciách a organizovanie vedeckých či odborných aktivít bral ako príležitosť pomáhať v rozvoji mladším kolegom, a tým posunúť úroveň matematiky na Žilinskej univerzite. Preto, keď ho v roku 1997 oslovilo vedenie Žilinskej univerzity vypracovať projekt na zriadenie Fakulty prírodných vied, bol nesmierne potešený. Videl v tom možnosť integrovať matematikov zo všetkých fakúlt ŽU do jedného pracoviska, a tým utvoriť lepšie podmienky pre ich odborný rast a príležitosť plne sa realizovať. Zároveň v tom videl možnosť pripravovať na budúcej fakulte učiteľov matematiky a iných odborov pre severné Slovensko, kde bol veľký nedostatok kvalifikovaných učiteľov. Bol nesmierne prekvapený a sklamaný, keď tento zámer zostal nepochopený a na fakultu, zriadenú 18.8.1998, prešlo iba 17 matematikov. Novovzniknutá fakulta síce mala v prvom roku iba 35 študentov, avšak bolo potrebné uchádzať sa o akreditáciu uskutočňovaných nových študijných programov a tiež o doktorandský študijný odbor „aplikovaná matematika“ dovtedy akreditovaný na Strojníckej fakulte, ktorého akreditáciu sme stratili presunom na nové pracovisko.

Bolo mnoho problémov, s ktorými profesor Marušiak ako dekan novozriadenej fakulty musel zápasiť. Popritom nezanedbával svoju vedecko-výskumnú prácu a kontakty s významnými zahraničnými matematikmi. V lete 2000 bol na dvojtýždňovom prednáškovom pobyte na Univerzite vo Fukuoke v Japonsku, odkiaľ sa vrátil s podlomeným zdravím. Nechcel však zostať doma, aby sa mohol liečiť, pretože videl mnoho úloh, ktoré na neho čakali. Začínajúci tretí rok jeho fakulty, blížiaca sa akreditácia, to ho nenechávalo na pokoji a chorobu iba zhoršovalo. Do budovania fakulty vkladal všetku svoju energiu a na boj s chorobou už nezostalo síl, až jej nakoniec podľahol.

Myslím, že profesor Marušiak by bol nesmierne potešený, ako sa nám v ďalších rokoch podarilo fakultu vybudovať, akreditovať množstvo študijných programov a obstáť pri poslednej akreditácii v oblasti výskumu matematika na čisté „A". Zároveň by bol zjavne ukrutne sklamaný, keď po takom úspechu boli matematické študijné programy všetkých stupňov zrušené a s nimi aj matematici fakulty.

V profesorovi Marušiakovi sme stratili významného, medzinárodne uznávaného odborníka v oblasti diferenciálnych rovníc. Bol nielen múdry a zanietený pre vec, ale aj rozvážny a zároveň plný elánu a optimizmu. Bol čestný, priateľský, ústretový a ohľaduplný. Patrí medzi ľudí, na ktorých spomienky ani rokmi nevyblednú.

Miroslava Růžičková[7]

[7] Katedra analýzy, Fakulta matematiky, Univerzita v Białymstoku;
e-mail: m.ruzickova@math.uwb.edu.pl

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky FPV UKF, Trieda A. Hlinku č. 1, 949 74 Nitra
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
1/2021 ročník 50

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková, Ivo Kluvanec
Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 550 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: apríl 2021

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal “Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences”
OMFI 1/2021 Volume 50
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

CONTENTS