OBZORY

3/2021 (50)

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2021 ročník 50

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 3/2021 Volume 50

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Znám, Beloslav Riečan et Daniel Kluvanec

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2021 (50)

Klasické úlohy geometrické pravděpodobnosti

Zdeněk Půlpán, Ondřej Slavíček

Abstract [Geometric probability]: The article shows the solutions the Buffon needle problem and the Bertrand's paradoxes.

Key words: geometric probability, the Buffonneedle problem, Bertrand´s paradoxes.

Souhrn: V článku jsou ukázána řešení Buffonovy úlohy o jehle a Bertrandových paradoxů.

Klíčová slova: geometrická pravděpodobnost, Buffonova úloha o jehle, Bertrandovy paradoxy.

MESC: C30, G40, G50, K50.

Úvod

Geometrická pravděpodobnost jako směr teorie pravděpodobnosti se objevila s úlohami, které formuloval Georges-Louis–Leclerc Buffon (1707 – 1788), francouzský matematik a botanik. Nové úlohy z oblasti geometrické pravděpodobnosti, které souvisely s úlohami Buffonovými, zveřejnil v 19. století další francouzský matematik Joseph-Louis-François Bertrand (1822 – 1900). Některá řešení úloh z geometrické pravděpodobnosti budila rozpaky, proto byla v té době prezentována jako „paradoxy“, později se však ukázalo, že příčina problému spočívala v nepřesné (nedostatečně podrobné) formulaci náhody a z toho vyplývajícím různým možnostem řešení. Ukážeme některé Buffonovy a Bertrandovy úlohy a jejich řešení z pohledu současné teorie.

1 Základ teorie geometrické pravděpodobnosti

Náhodný děj, který budeme popisovat, si můžeme představit jako činnost jistého náhodného generátoru. Ten je určen množinou dvojic $(x, f(x))$ a náhodným mechanismem, který v každém kroku náhodně volí prvek x z množiny M v závislosti na váze $f(x) \in \langle 0; 1\rangle$; interval $\langle 0; 1\rangle$ je množinou vah. Váha $f(x)$ nás informuje o tom, jaká je míra očekávání výběru $x \in M$; náhodný výběr prvku $x \in M$ je realizací náhodného generátoru ($f(x)$ nezávisí na pořadí jednotlivých realizací generátoru, uvažujeme jeho funkci jako posloupnost vzájemně nezávislých voleb $x \in M$).

a) Nejjednodušší úloha
Uvažujme M jako množinu *konečně* mnoha (například n) bodů x_i úsečky AB. Užijeme-li takového náhodného generátoru, že každý z bodů množiny M úsečky AB má stejnou možnost, že bude výsledkem jeho náhodné volby, pak musí být $f(x_i) = \\ = konst$ pro každé i. Využijeme-li možnosti normování, volíme $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1 = \\ = n \cdot konst$, tedy $konst = \frac{1}{n} = f(x_i)$ pro každé i. Pak je pravděpodobnost P, že bod x, generátorem náhodně stanovený, bude některým z bodů úsečky CD, která je částí úsečky AB, rovna

$$P = \sum f(x_i) = \sum \frac{1}{n} = \frac{\textit{počet bodů z M, ležících na úsečce CD}}{n}, \qquad (1)$$

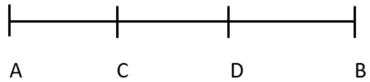
kde se sčítá jen přes ty body množiny M, které jsou na úsečce CD. Pravděpodobnost P je poměr počtu všech případů příznivých (tj. v úsečce CD) ku všem možným (v úsečce AB).

V případě, že generátor dává každému bodu x_i množiny M obecně jinou možnost $f(x_i) \geq 0$, že bude výsledkem jeho volby, je předchozí pravděpodobnost určena jen první částí předchozího vztahu, tedy jako $\sum f(x_i)$. Jak však postupovat, když množina M je množinou všech bodů úsečky a náhodný generátor přiřazuje v každém pokusu s jistou, obecně rozdílnou „silou“ $f(x)$ bod x úsečky AB? V tom případě musí přejít obyčejné sčítání na integrování a odpovídající pravděpodobnost P pak je poměr

$$P = \frac{\int f(x)\mathrm{d}x, \text{kde se integruje přes všechny body úsečky CD}}{\int f(x)\mathrm{d}x, \text{kde se integruje přes všechny body úsečky AB}} \qquad (2)$$

(použijeme-li opět normovací techniky, stanovujeme integrál $\int f(x)\mathrm{d}x$ přes všechny body úsečky AB roven 1).

Někdy však o funkci náhodného generátoru toho moc nevíme. Pak o jeho funkci si musíme vytvořit určitou představu na základě vlastní úvahy. Na základě toho, co již víme, přistupme k řešení naší úlohy. (Obr. 1)



Obrázek 1. K nejjednodušší úloze geometrické pravděpodobnosti

Úvaha o náhodné volbě bodu X z úsečky AB při neznalosti funkce náhodného generátoru může být založena na předpokladu, že není důvod k rozdílné míře očekávání, že bod X se octne v určitém bodě úsečky AB než v jiném bodě téže úsečky. Pak je rozumné uvažovat, že hledaná pravděpodobnost P je úměrná délce úsečky CD:

$$P = \frac{|CD|}{|AB|}, \quad A \neq B. \tag{3}$$

Předchozí vztah pro pravděpodobnost P (vyjádřený poměrem) je vzorcem (2). Body úsečky AB, předpokládáme $A \neq B$, však reprezentují nekonečnou množinu všech stejně možných elementárních případů, i body úsečky CD reprezentují (až na degenerovaný případ, kdy buď C = D nebo taková úsečka CD neexistuje, pak je $|CD| = 0$) opět nekonečnou množinu všech příznivých případů. Rozdíl od (1) je v tom, že množina všech možných výsledků (reprezentovaná body úsečky AB) je zde *nekonečná a dokonce nespočetná*. Pravděpodobnost P nelze pak určovat pomocí poměru *počtu* případů příznivých k *počtu* všech případů možných, tedy pomocí pravděpodobností na elementárních jevech. K určení pravděpodobnosti je pak nutné užít vhodné míry, definované i pro více než spočetné množiny (zde na úsečce AB). Vhodnou mírou je v případě, kdy náhodná metoda zajišťuje pro každý bod X úsečky AB stejnou šanci, že bude výsledkem pokusu, velikost úsečky. Je dobré si všimnout, že pravděpodobnost P, počítaná podle (3) nezávisí na poloze úsečky CD na úsečce AB.

Předpokládejme, že jiná metoda náhodného určení bodu X na úsečce AB využívá náhodný generátor, pro něhož místa bližší bodu B mají větší šanci, že budou výsledkem pokusu, tedy $f(x) = kx, k > 0$. K určení polohy úsečky CD na úsečce AB zavedeme na úsečce AB soustavu souřadnou: A[0], B[1]. Pak pro náhodnou volbu bodu X na na úsečce CD (C[c], D[d], $d \geq c \geq 0; d \leq 1$) je

$$P = \frac{\int_c^d kx \,\mathrm{d}x}{\int_0^1 kx \,\mathrm{d}x} = \frac{\frac{d^2-c^2}{2}}{\frac{1}{2}} = d^2 - c^2. \tag{4}$$

Podle (4) hodnota pravděpodobnosti P závisí na poloze úsečky CD na úsečce AB.

Z předchozích příkladů vyplývá, že pro správný výpočet pravděpodobnosti potřebujeme znát vlastnosti generátoru náhody, pro který pravděpodobnost určujeme.

Případ náhodného generátoru, generujícího body na úsečkách nebo křivkách, případně plochách či v prostoru tak, že každý bod bude mít a priori stejnou možnost být vygenerován ze základní (geometrické) množiny M je případem nejčastějším a také nejsnadněji představitelným. V náhodných pokusech s geometrickými útvary to často bývá jako základní předpoklad pro funkci vstupního náhodného generátoru. Hodnoty takto jednoduše pracujícího náhodného generátoru můžeme pro konečnou základní množinu M získat losováním nebo z tabulek náhodných čísel (pro číslice

$0, 1, 2, \ldots, 9)$ nebo také jako funkce Ran($*$) v počítači či na kalkulačce (pro trojice číslic $0, 1, \ldots, 9$).

Podívejme se nyní na to, jaký vliv na váhovou funkci f *všech bodů úsečky* bude mít náš předpoklad o funkci náhodného generátoru.

b) Zavedení souřadnic
Uvažujme trochu obecněji o „váze všech bodů úsečky" s krajními body o souřadnicích $x_1, x_2 \quad (x_1 \leq x_2)$. Za hledanou míru budeme považovat nezápornou hodnotu funkce $g(x_1, x_2)$ s podmínkami, odpovídajícími těmto intuitivním představám:

1) hodnota funkce $g(x_1, x_2)$ nezávisí na poloze počátku souřadného systému
2) leží-li nějaký bod se souřadnicí x_3 uvnitř úsečky s krajními body o souřadnicích x_1, x_2, pak musí platit
$$g(x_1, x_2) = g(x_1, x_3) + g(x_3, x_2).$$

Jestliže nyní zavedeme nové souřadnice $X = x + a$, kde a je konstanta, musí být podle 1) $g(x_1, x_2) = g(X_1, X_2)$. Tedy $g(x_1, x_2)$ je možné zapsat jako funkci H jediné proměnné $x_2 - x_1$, $g(x_1, x_2) = H(x_2 - x_1)$. Z podmínky 2) pak plyne, že

$$H(x_2 - x_1) = H(x_2 - x_3) + H(x_3 - x_1).$$

Rozdíl $x_2 - x_1$ je délka úsečky AB. Zavedeme-li do daného výrazu $x = x_2 - x_3$ a $y = x_3 - x_1$, dostaneme jednoduchý a velmi srozumitelný výraz pomocí funkce f, definované vztahem $f(x) = H(x_2 - x_3)$ ve tvaru

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

To je funkcionální rovnice, ze které vyplývá, že každá nezáporná funkce $f(x)$, která splňuje předchozí vztah, se dá vyjádřit jednoduše: $f(x) = k \cdot x$, kde $k > 0$. Z předchozích intuitivních předpokladů vyplývá, že zmiňovaná *váha všech bodů jakékoliv úsečky velikosti* x je pro takový náhodný generátor rovna $k \cdot x$, tedy úměrná velikosti x úsečky (při předpokládané funkci našeho náhodného generátoru).

c) Předchozí vztahy lze použít k výpočtu pravděpodobnosti volby bodů X z úsečky CD umístěné na úsečce AB vztahem $P(CD) = \frac{|CD|}{|AB|}$ nebo i v případě, že body X leží v části CD *oblouku* AB *nějaké křivky*. Podobně bereme úhel α za míru všech polopaprsků, které uvnitř toho úhlu z jeho vrcholu vycházejí

$$P = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Za míru množství bodů, které vyplňují určitou část prostoru, roviny či křivé plochy nebo křivky považujeme velikost objemu či plošný obsah nebo délku příslušné části.

Za míru určitého svazku rovnoběžných přímek (rovin) bereme v rovině velikost kolmé úsečky, jejímiž všemi body přímky (roviny) procházejí.

Příslušné vzorce pro výpočet pravděpodobnosti P musí splňovat podmínku invariance vůči shodnému zobrazení (to je totiž zobrazení, zachovávající velikost úseček).

Následující příklad ukazuje, že nelze užít pro výpočet pravděpodobnosti vzorce, který by vznikl přepisem pro nelineárně transformovanou náhodně určenou veličinu.

Příklad: Transformujeme-li náhodně zvolenou nezápornou veličinu X ryze monotónním nelineárním vztahem $Y = \varphi(x)$ na veličinu Y, pak pro pravděpodobnost P platí

$$P(x < X < y) = \frac{\mu(XY)}{\mu(\Omega)} = \frac{y-x}{\mu(\Omega)} \neq P(\varphi(x) < Y < \varphi(y)) = \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{\mu(\varphi(\Omega))}.$$

Například pro $x > 0$ je také ryze monotónním vztahem $Y = X^3$, pro tento vztah ale neplatí konstantnost hustoty. Uvedená transformace tedy není transformací vhodnou. Pravá strana předchozího vztahu není mírou velikosti úsečky, pokud ji správně (tj. lineárně) netransformujeme.

Lze to hned vidět např. v úloze o pravděpodobnosti, že „náhodně“ volený bod úsečky padne do některé její části:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_2^3 = 1;\ x_3 = 0,1;\ x_4 = 0,3;\ x_3^3 = 0,001;\ x_4^3 = 0,027$$

$$P = \frac{0,2}{1} = 0,2;\ P = \frac{0,027 - 0,001}{1} = 0,026.$$

Hodnoty pravděpodobnosti P po transformaci $Y = X^3$ se liší od hodnoty před transformací, tato transformace nemůže být použitelnou transformací náhodně určených veličin pro daný úkol určení pravděpodobnosti. Čtenář jistě poznal, že zde jde o jiný generátor náhody než námi právě uvažovaný.

d) Základním a nejobecnějším vztahem pro geometrickou pravděpodobnost jevu A na základní množině Ω je

$$P(A \mid \Omega) = \frac{\mu(A \cap \Omega)}{\mu(\Omega)}, \tag{5}$$

kde μ je vhodná míra na borelovských množinách v Ω. Nejčastěji to je Lebesgueova míra. Touto mírou μ je například *velikost* úsečky (pro úsečku), velikost plochy (pro plošný útvar) nebo velikost objemu (pro určitou část prostoru). Jevem A se zde rozumí geometrický objekt, který je borelovskou množinou z Ω, tj. je objektem pro který je možné určit délku, obsah nebo objem.

Tato definice geometrické pravděpodobnosti v sobě zahrnuje jak případy klasické definice (pomocí které je pravděpodobnost poměrem počtu všech příznivých případů ku všem možným), tak i situaci, kdy se pravděpodobnost týká i systému nekonečných (ovšem jen borelovských) množin. Pro nekonečné množiny musíme elementární výsledky uvažovat jako diferenciály $\mathrm{d}\omega$:

- jednorozměrný případ: $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x$,
- dvourozměrný případ: $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,
- trojrozměrný případ: $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Míra μ souvisí s náhodným generátorem. Pro jednorozměrný případ je $\mu(A \cap \Omega) = \int_{A\cap\Omega} f(x)\mathrm{d}x$, kde $f(x)$ je váha (také jsme řekli „síla“) náhodné volby $x \in A \cap \Omega$, pro dvourozměrný je $\mu(A \cap \Omega) = \int_{A\cap\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $f(x,y)$ je váha náhodné volby $(x,y) \in A \cap \Omega$, atd. V matematice se takové váhové funkce f nazývají hustotami.

Záměna proměnných (například pro dvourozměrný případ) ve tvaru $x = \varphi(\alpha,\beta)$; $y = \psi(\alpha,\beta)$ vede pak od elementární pravděpodobnosti $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x\, dy$ k elementární pravděpodobnosti $\mathrm{d}\omega = J(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$, kde

$$J(\alpha,\beta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} & \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} & \frac{\partial\psi}{\partial\beta} \end{vmatrix}$$

je determinant z Jacobiánu transformace. Uvedenou transformací proměnných přejde funkce náhodného generátoru s vahou 1 pro každý prvek z M na funkci náhodného generátoru s vahou $|J(\alpha,\beta)|$.

Jeden z důvodů, proč jsou úlohy z geometrické pravděpodobnosti obtížné

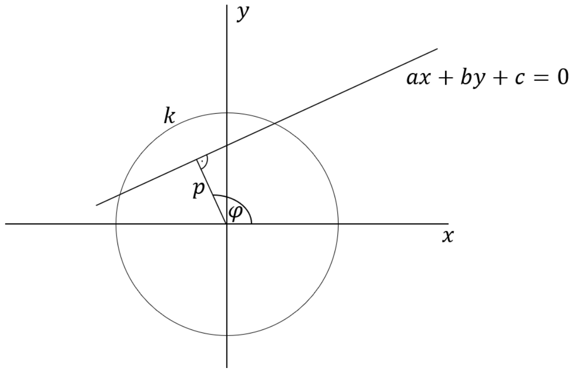
Pokusme se určit míru všech sečen dané kružnice k se středem v počátku soustavy souřadné a poloměrem r následujícím způsobem. Vyjděme z obecné rovnice přímky

$$ax + by + c = 0, \quad \text{kde} \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

Tato rovnice určuje přímku na základě tří závislých souřadnic (a,b,c). Počet souřadnic, kterými je přímka určena, můžeme snížit na dvě, když budeme předpokládat, že $c \neq 0$:

$$\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y + 1 = 0 \equiv ux + vy + 1 = 0.$$

Předchozí rovnice určuje přímku pomocí dvou souřadnic (u,v). Přitom jsme však předpokladem $c \neq 0$ vyloučili přímky, procházející počátkem soustavy souřadné. Které z přímek vyjádřených pomocí u, v jsou sečny dané kružnice? (Viz Obr. 2.)



Obrázek 2. K určení míry sečen dané kružnice k

Označme písmenem p délku kolmice, spuštěné ze středu dané kružnice na přímku určenou souřadnicemi (u, v). Pak platí

$$p = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \quad u^2 + v^2 \neq 0.$$

Svírá-li kolmice spuštěná z počátku soustavy souřadné na naši přímku orientovaný úhel φ s osou x, můžeme přejít k novým souřadnicím přímky (p, φ), které jsou vzájemně nezávislé a jejich vztah s původními souřadnicemi je určen dvěma rovnicemi

$$p = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \quad \varphi = \text{arctan}\,\frac{v}{u}; \quad u \neq 0.$$

Zde jsme navíc vyloučili přímky rovnoběžné s osou y. Podmínka pro to, aby přímka, určená souřadnicemi (u, v) byla sečnou kružnice k je

$$0 < p < r \quad \rightarrow \quad 0 < \frac{1}{u^2 + v^2} < r^2 \quad \rightarrow \quad u^2 + v^2 > \frac{1}{r^2}.$$

V soustavě souřadné (u, v) je tato množina neomezená, tudíž nemá konečnou míru (je to vnějšek kružnice se středem v počátku soustavy souřadné a poloměrem $1/r$).

Trochu předběhneme další výklad a pokusíme se stanovit podmínku pro to, aby délka sečny byla větší než strana rovnostranného trojúhelníka, vepsaného do kružnice k. Je zřejmé, že takové sečny musí splňovat následující podmínku

$$p < \frac{r}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{u^2 + v^2} < \frac{r^2}{4} \quad \rightarrow \quad u^2 + v^2 > \frac{4}{r^2}.$$

I tato množina je však v soustavě (u, v) neomezená. Nelze tedy odhadnout pravděpodobnost určením plochy z rovnoměrného generování bodů sečen v soustavě (u, v).

(Poznamenáváme jen, že jsme zde vynechali jen ty množiny sečen, které mají míru rovnu 0.)

Budeme-li však používat soustavu souřadnou určenou dvojicí (p, φ), pak v ní přímky, které jsou sečnami dané kružnice se zobrazí obdélníkem se stranami $r, 2\pi$ (bez bodů se souřadnicí $p = 0$ a $\varphi = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$) a sečny, které mají délku větší, než je strana vepsaného rovnostranného trojúhelníka se zobrazí obdélníkem se stranami o délkách $\frac{r}{2}, 2\pi$ (opět s vynecháním příslušných dvou úseček). Poměr odpovídajících ploch je tedy $1/2$ a to je také geometrická pravděpodobnost, že náhodně vybraná sečna má délku větší než je strana rovnostranného trojúhelníka vepsaného do kružnice (při rovnoměrném generování $p \in \langle 0; r)$ a $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$).

Jaké podmínky musí splňovat transformace souřadnic, abychom z transformovaných souřadnic mohli určit příslušnou geometrickou pravděpodobnost? To uvidíme v následující kapitole.

Kanonické vyjádření přímky

Obecná rovnice přímky $ax + by + c = 0$, kde $a^2 + b^2 \neq 0$, $c \leq 0$, se dá psát po vydělení $\sqrt{a^2 + b^2}$ ve tvaru

$$x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - p = 0;$$
$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; p = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{6}$$

Tyto rovnice zobrazují přímky v trojrozměrném prostoru se třemi závislými souřadnicemi (a, b, c) nebo dvěma nezávislými souřadnicemi (φ, p). Pro náš účel popisu je výhodné využívat dvourozměrný popis jen určité množiny přímek neprocházejících počátkem soustavy souřadné (vynecháním této množiny přímek neohrozíme správný odhad míry množiny všech přímek vyhovujících daným podmínkám). Využijeme při tom výhodné geometrické interpretace parametrů (φ, p). Pata kolmice, spuštěné z počátku soustavy souřadné na přímku pak má souřadnice $[p \cdot \cos\varphi; p \cdot \sin\varphi]$; $p = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}} > 0$, $\cos\varphi = \frac{x}{p}$, $\sin\varphi = \frac{y}{p}$, kde φ je směrový úhel kolmice na přímku, p je vzdálenost přímky od počátku souřadného systému; přímky neprocházející počátkem souřadného systému mají vyjádření $x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - p = 0$ s parametrem $p > 0$. Tímto vyjádřením jsou jednoznačně určeny souřadnice $p > 0$ a φ všech takových přímek. Předchozí rovnici můžeme vydělit $-p \neq 0$ a dostaneme rovnici ve tvaru

$$\frac{x\cos\varphi}{-p} + \frac{y\sin\varphi}{-p} + 1 = xu + yv + 1 = 0. \tag{7}$$

Transformace souřadnic nechť je vyjádřena rovnicemi:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b. \end{aligned} \tag{8}$$

Pak je $\mathrm{d}x\,dy = \mathrm{d}x'dy'$, protože $F(\alpha,\beta) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1$ a tato transformace je kanonická (je to posunutí a otočení, tedy shodné zobrazení, o něm víme, že zachovává velikost úseček). Transformace rovnice $ux + vy + 1 = 0$ podle našich vztahů je pak

$$u(x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha + a) + v(x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \cos\alpha + b) + 1 = 0.$$

Porovnáním koeficientů u nových proměnných x', y' dostaneme vztah mezi koeficienty původní a transformované rovnice $Ux' + Vy' + 1 = 0$:

$$U = \frac{u \cdot \cos\alpha + v \cdot \sin\alpha}{ua + vb + 1}; \quad V = \frac{-u \cdot \sin\alpha + v \cdot \cos\alpha}{ua + vb + 1}. \tag{9}$$

Výpočtem Jacobiánu této transformace $\frac{\partial(U,V)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial u} \\ \frac{\partial U}{\partial v} & \frac{\partial V}{\partial v} \end{vmatrix}$ a po algebraických úpravách získáme vztah pro míru „počtu“ přímek se souřadnicemi (u,v) v množině E ve tvaru (viz např.[1])

$$\mu(E) = \iint_E \frac{1}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{10}$$

kde elementární pravděpodobnost je $\frac{1}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$. Protože $u = \frac{\cos\varphi}{-p}$, $v = \frac{\sin\varphi}{-p}$, je Jacobián této transformace $\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,\varphi)} = p^{-3} = (u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}$ a předchozí elementární pravděpodobnost přejde na velmi jednoduchý tvar $\mathrm{d}p\,d\varphi$.

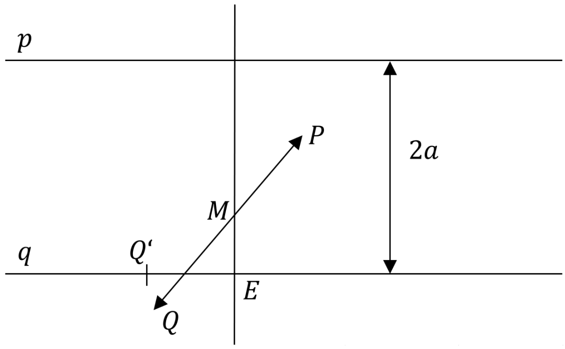
2 Buffonova úloha o jehle (první úloha geometrické pravděpodobnosti)

Na systém rovnoběžných přímek, jejichž vzdálenost je $2a$ je náhodně vržena jehla délky $2l$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou z rovnoběžek? (Předpokládáme, že je jednoznačně zjistitelné, zda k protnutí rovnoběžky došlo nebo ne.) (Obr. 3)

Řešení:

a) přímky $p, q, \ldots$ tvoří systém rovnoběžných přímek; QP je jehla; M je střed jehly; $|QP| = 2l$; vzdálenost rovnoběžek je $2a$.
Aby jehla mohla protnout přímku q, je nutné, aby $|EM| < l$.
Jestliže poloha M je pevná, pak je ještě nutné, aby $\measuredangle EMQ < \measuredangle EMQ'$;

$$\cos\measuredangle EMQ' = \frac{|EM|}{|MQ'|}$$



Obrázek 3. Buffonova úloha o jehle (situace)

$$\measuredangle EMQ' = \arccos \frac{|EM|}{|MQ'|}.$$

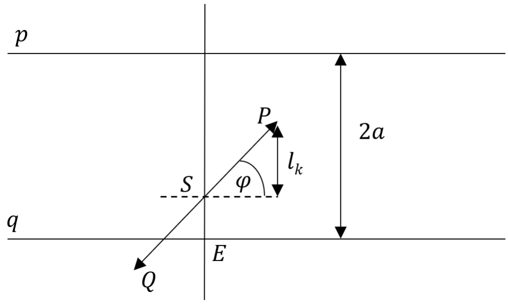
Pravděpodobnost, aby $\measuredangle EMQ$ byl uvnitř $\measuredangle EMQ'$ je rovna $\frac{2}{\pi} \arccos \frac{|EM|}{|MQ'|}$. Pravděpodobnost, že jehla protne přímku q, bude proto „součet“ všech možných takových případů:

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^l \arccos \frac{|EM|}{|MQ'|} \frac{\mathrm{d}(EM)}{a} = \frac{2l}{a\pi} \int_0^1 \arccos y \, \mathrm{d}y = \frac{2l}{a\pi}. \qquad (11)$$

Důležité je, že výsledek je možné *experimentálně ověřit*! Analytický tvar rovnice „jehly“ (úsečky) v systému rovnoběžek lze stanovit pomocí náhodného generátoru (nebo primitivně prostým házením jehly na systém rovnoběžek). Předpokládáme, že pak lze jednoznačně určit, zda jehla protne některou z rovnoběžek. Z relativní četnosti počtu průsečíků m jehly k počtu všech pokusů n dostaneme přibližně $\pi \approx \frac{2 \cdot l \cdot n}{a \cdot m}$. Ověřování bylo založeno na shodě s dřívějším numerickým přibližným určením čísla π:

Rok	Autor	Počet pokusů
1777	Buffon	?
1850	Wolff	5000
1860	De Morgan	600
1901	Lazerini	3408
20.století	Pólya	1865

Vztah (11) určuje pravděpodobnost P jako iracionální číslo (vzhledem k tomu, že na pravé straně výrazu je π). Klasický výpočet pravděpodobnosti ji stanovuje jen jako racionální číslo. V tom je vidět i význam obecnějšího vztahu (5). Funkčnost vztahu (11) dává také možnost například odhadu délky jehly. Zobecnění toho najdeme dále v d).

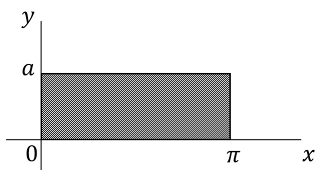


Obrázek 4. K alternativní metodě řešení Buffonovy úlohy o jehle

b) jiné řešení: úloha může být převedena na jednorozměrnou (Obr. 4): stačí použít jednoduchého statistického vztahu pro střední hodnotu a předpokladu platnosti zákona velkých čísel

$$\sin\varphi = \frac{l_k}{l}, \quad l_k = l \cdot \sin\varphi$$

φ je rovnoměrně rozděleno v intervalu $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$; $\varphi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$; střední hodnota $El_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cdot \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{2l}{\pi}$; aby k zásahu došlo, musí být střed jehly v intervalu šířky $\frac{4l}{\pi}$, celý interval má šířku $2a$; pravděpodobnost této situace je proto dána poměrem $\frac{4l}{\pi} : 2a = \frac{2l}{a\pi}$.



Obrázek 5. Ke klasickému (školnímu) řešení Buffonovy úlohy o jehle

c) klasické (školní) řešení (Obr. 5): $\varphi \in \langle 0; \pi\rangle$; $SE = y \in \langle 0; a\rangle$. Jehla má s nějakou přímkou systému společný bod právě když platí $y \leq l \cdot \sin\varphi$

$$\int_0^{\pi} l \cdot \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = 2l, \quad P = \frac{2l}{a\pi}.$$

d) Zobecnění: Na systém rovnoběžných přímek vysypeme neznámý počet jehel neznámých různých délek. Dostaneme tak N průsečíků jehel se soustavou rovnoběžných přímek. Pak je podle předchozího vzorce

$$\overline{N} = nP = \frac{2\sum n_i \cdot l_i}{a\pi} = \frac{2}{a\pi} \cdot L.$$

Z toho máme

$$L = \frac{a\pi}{2} \cdot \overline{N}. \tag{12}$$

Systém rovnoběžek hraje roli testovacího systému, který má určitou „délkovou“ intenzitu. Pro „izotropní křivku“ délky L na libovolné oblasti obsahu A dostaneme dosazením do původního vztahu pro L

$$\frac{L}{A} = \frac{\pi}{2} \cdot N_L, \tag{13}$$

kde N_L je počet průsečíků na jednotkové délce. Užití předchozí vlastnosti je možné například pro odhad délky meandrujícího toku.

3 Bertrandův „paradox“ a jeho řešení

Jde o odhalení zdroje „náhody“ úlohy o zjištění pravděpodobnosti, že náhodně určená tětiva dané kružnice má délku větší než je strana do ní vepsaného rovnostranného trojúhelníka. Jsou tři různá řešení této úlohy:

$$\text{a) } P = \frac{1}{3}; \text{ b) } P = \frac{1}{2}; \text{ c) } P = \frac{1}{4}.$$

V prvním případě předpokládáme, že jeden vrchol rovnostranného trojúhelníka je v určitém bodě A dané kružnice. V tomto bodě A tečna ke kružnici a ramena úhlu rovnostranného trojúhelníka AB, AC vymezují tři stejné úhly o velikosti $60°$. Právě jen tětiva, procházející bodem A v úhlu $\measuredangle CAB$ má délku větší než je strana rovnostranného trojúhelníka ABC. Velikost úhlu je mírou „počtu“ přímek v něm ležících.

Ve druhém případě vezmeme všechny tětivy rovnoběžné například se stranou AB vepsaného rovnostranného trojúhelníka. Ty, které mají délku větší než je strana AB, mají středy na úsečce, která má délku rovnou polovině průměru kružnice (přímka SC, kde S je střed kružnice je osou úsečky AB, tětiva velikosti AB má střed ve středu úsečky SC). Velikost úsečky je zde mírou „počtu“ tětiv.

Ve třetím případě vybíráme ze všech tětiv ty, které mají střed v kruhu o polovičním poloměru a stejném středu jako uvažovaná kružnice. Míra plochy tohoto menšího kruhu k míře plochy daného kruhu je pak hledaná pravděpodobnost. Určitá plocha je zde mírou „počtu“ tětiv.

Soubory tětiv různé délky jsou zde generovány různými náhodnými generátory (operujícími na rozdílných množinách), takže se vlastně o paradox nejedná. Jaké je tedy správné řešení? Jak uvidíme dále, chyba je v nepřesnosti pojmu „náhodně“ (každý z příkladů se týká jiného náhodného generátoru).

a) volíme poloměr kružnice $r = 1$; přímka je náhodně určena dvěma body na kružnici, které mohou být určeny úhly $\alpha; \beta \in \langle 0; \pi)$; odpovídající generátor operuje na $\langle 0; \pi) \times \langle 0; \pi)$; vycházíme pak z určení přímky rovnicí $x \cos\Theta + y \sin\Theta - p = 0$, kde Θ je orientovaný úhel kolmice na přímku, vzdálenou od počátku o velikosti p; vztah mezi polohami α, β dvou bodů tětivy a parametry Θ a p jsou dány vztahy $\alpha = \Theta - \arccos p$, $\beta = \Theta + \arccos p$; Jacobián transformace je pak

$$|J| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial\Theta} & \frac{\partial\alpha}{\partial p} \\ \frac{\partial\beta}{\partial\Theta} & \frac{\partial\beta}{\partial p} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{1-p^2}};$$

míra prostoru všech možností poloh α, β je $\pi \cdot \pi = \pi^2$. (Pozn.: výpočet nezahrnuje případ $p = 0$, ale ten má míru 0.) Odpovídající elementární pravděpodobnost určíme pomocí Jacobiánu a dostaneme $\mathrm{d}P = \frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = \frac{1}{\pi^2}\,|J|\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}p$. Pravděpodobnost $P = \frac{1}{\pi^2}\iint \mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi \mathrm{d}\Theta \int_0^{0,5} \frac{2}{\sqrt{1-p^2}}\mathrm{d}p = \frac{1}{\pi} 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, náhodný generátor tedy operuje na $\langle 0; 0,5) \times (0; \pi)$ s vahou $|J| = \frac{2}{\sqrt{1-p^2}}$.

b) opět vyjdeme ze zadání tětivy rovnicí $x\cos\Theta + y\sin\Theta - p = 0$; určující je zde délka normály p a volba úhlu Θ; elementární pravděpodobnost pak je

$$\mathrm{d}P = \frac{1}{\pi}\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\Theta, \quad P = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\Theta \int_0^{0,5} \mathrm{d}p = \frac{1}{2},$$

náhodný generátor operuje na $\langle 0; \pi) \times \langle 0; 0,5)$ s vahou 1.

c) mírou svazku je plocha vnitřního kruhu, hustota „plochy“ S je $\frac{\pi p^2}{1^2\pi} = S$; $\mathrm{d}S = 2p\,\mathrm{d}p$ (otáčivý pohyb po kružnici je nezávislý na pohybu ke středu kruhu). Náhodný generátor zde operuje na $(0; 2\pi) \times (0; 0,5)$ s vahou $2p$. Elementární pravděpodobnost pak je

$$\mathrm{d}P = \frac{1}{2\pi}2p\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\Theta = \frac{1}{\pi}p\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\Theta, \quad P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\Theta \int_0^{0,5} 2p\;\mathrm{d}p = \frac{1}{4}.$$

Jako paradox se matematikům jevily tři možné výsledky „téže“ úlohy. Neuvědomili si však důležitou věc, že každé řešení se opírá o funkci jiného náhodného generátoru. Ve formulaci původní úlohy totiž chybí předpoklad určitého generátoru náhody. Chybí předpoklad „na jaké parametry tětivy (nebo množiny tětiv) se vztahuje náhodný generátor?“. Dalším důležitým předpokladem pro správné řešení úloh z geometrické pravděpodobnosti je znalost teorie míry a teorie množin. Proto správná řešení se objevila až na přelomu 19. a 20. století. Současně se však zjistilo, že principy výpočtu geometrické pravděpodobnosti otevírají novou cestu pro rozvoj teorie i aplikací pravděpodobnosti (viz [3]), která nemusí být založena na Kolmogorovových axiomech.

L i t e r a t u r a – R e f e r e n c e s

[1] Kendall M., Moran P.: *Geometric probability*, Hafner Publishing Company, 1963, ruský překlad Nauka, Moskva 1972.
[2] Klain D. A., Rota G.C.: *Introduction to Geometric Probability*, Cambridge University Press, 1997.
[3] Solomon H.: *Geometric Probability*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 1978.
[4] Hostinský, O.: *Geometrické pravděpodobnosti*, JČMF Praha 1926.
[5] Saxl, I.: Geometrická pravděpodobnost, *Pravděpodobnost a statistika na střední škole*, Matfyzpress, Praha 2005, str.47- 72.
[6] Székely, G., J.: *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, Reidel 1986.

Adresy autorů:

Dopravní fakulta Jana Pernera, Univerzita Pardubice, Studentská 95, 532 10 Pardubice

e-mail: `zdenek.pulpan@upce.cz`, `ondrej.slavicek@upce.cz`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2021 (50)

VMI ZDELÁVANIE V MATEMATIKE A INFORMATIKE

Sebahodnotiace rubriky ako nástroj pre lepšie porozumenie matematiky

Timea Gábová, Dušan Šveda

Abstract [Self-Assessment Rubrics as the tool to better understand mathematics for students]: The content of the paper is the results of research taking place in mathematics lessons of one class of the third year of grammar school. It deals with the use of self-assessment rubrics within the thematic unit analytical geometry and their possible impact on the success of students in conceptual tasks. The results of the research show that there is a relationship between the use of self-assessment rubrics and students' understanding. Students consider self-assessment as an essential part of teaching. The paper also contains a sample of the self-assessment rubric and feedback from students on the use of these rubrics.

Key words: Self-Assessment, Self-assessment rubrics, Formative assessment, analytical geometry, school mathematics

Súhrn: Obsahom článku sú výsledky výskumu prebiehajúceho na hodinách matematiky jednej triedy tretieho ročníka gymnázia. Pojednáva o použití sebahodnotiacich rubrík v rámci tematického celku analytická geometria a ich možnom vplyve na úspešnosť žiakov v konceptuálnych úlohách. Výsledky výskumu ukazujú, že existuje vzťah medzi použitím sebahodnotiach rubrík a porozumením žiakov. Žiaci považujú sebahodnotenie za podstatnú časť vyučovania. Článok obsahuje aj ukážku sebahodnotiacej rubriky a spätnú väzbu žiakov na použitie týchto rubrík.

Kľúčové slová: sebahodnotenie, sebahodnotiace rubriky, formatívne hodnotenie, analytická geometria, školská matematika

MESC: C30, C70, D40, G70

Úvod

Formatívnemu hodnoteniu je venovaných množstvo výskumov. Charakterizujeme ho ako hodnotenie počas procesu učenia sa. V rámci formatívneho hodnotenia má žiak dostať spätnú väzbu na svoj výkon, poučiť sa zo svojich chýb, zlepšiť sa a posunúť sa vedomostne vpred [7]. Ukazuje sa, že práve táto cesta je vhodnou pre posun od učenia sa poznatkov k ich porozumeniu [8]. Sebahodnotenie, ako súčasť hodnotiaceho procesu je cenným vzdelávacím nástrojom. Sebahodnotenie môže pôsobiť na:

- Identifikáciu medzier vo svojich schopnostiach alebo znalostiach a zameranie sa na odstránenie týchto medzier.
- Stanovenie si realistických cieľov.
- Sledovanie vlastného pokroku a skúmanie vlastnej práce. [10]

Proces sebahodnotenia pomáha žiakom zapojiť sa do vyučovacieho procesu, motivuje žiakov a podporuje u nich sebareflexiu a prebratie zodpovednosti za vlastné učenie sa [9]. Sebahodnotenie je o tom, ako žiaci rozvíjajú svoju zručnosť učenia sa. Nejde primárne o individuálne hodnotenie sa známkou či stupňom a nie je to ani suplovanie učiteľa [1]. U žiakov, ktorí sú hodnotení v zmysluplných a užitočných aktivitách, je možné predpokladať, že oproti tým, ktorí nie sú takto hodnotení, budú viac motivovaní a investujú viac času do hlbšieho porozumenia [4].

Na druhej strane tradičné hodnotiace postupy zamerané na známky, môžu mať nepriaznivý vplyv na schopnosť žiakov hodnotiť svoju vlastnú prácu [2]. Ukazuje sa, že žiaci tento druh hodnotenia vnímajú ako dôležitú súčasť vyučovacieho procesu a procesu učenia sa, a preto potrebujú dostať na hodinách naň priestor. Pritom je samozrejme dôležité správne používanie tohto nástroja. Sebahodnotenie prináša „zapojenie" žiakov do rozhodovania o vlastnom úspechu a výsledkoch učenia sa, identifikácia štandardov alebo kritérií uplatňovaných pri práci a následnému rozhodnutiu do akej miery splnili tieto kritériá [1]. Základom sebahodnotenia je schopnosť žiakov pochopiť vlastné potreby v procese učenia, ktoré potom môžu tlmočiť svojim spolužiakom alebo učiteľovi. Sebahodnotenie je hodnotný prístup k podpore učenia sa, najmä ak sa používa formatívne [5].

V tomto príspevku sa zaoberáme sebahodnotením žiakov, ktoré je súčasťou formatívneho hodnotenia vo vyučovaní matematiky na strednej škole. Uvedieme výsledky výskumu, ktorý sme realizovali v 3. ročníku na gymnáziu.

1 Metodika výskumu

V našom výskume, ktorý nadväzoval na predchádzajúcu prípadovú štúdiu [3], sme riešili tieto výskumné otázky:

- Existuje súvislosť medzi použitím sebahodnotiacich rubrík a úspechom žiakov pri riešení procedurálnych úloh?
- Existuje súvislosť medzi použitím sebahodnotiacich rubrík a úspechom žiakov pri riešení konceptuálnych úloh?
- Aký názor majú žiaci na používanie sebahodnotiacich rubrík?.

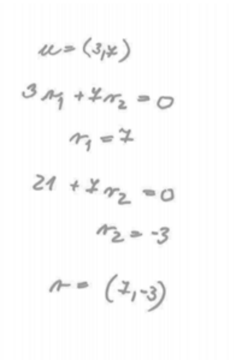
Vo výskume sme spolupracovali s rovnakou triedou, ktorá s nami spolupracovala na predchádzajúcej prípadovej štúdii [3]. Vzorka žiakov bola zložená z 34 žiakov 3. ročníka gymnázia. Do výsledných porovnaní sme nepočítali žiakov, ktorí chýbali aspoň na jednom teste.

Pre riešenie výskumných úloh sme zostavili dva didaktické testy, tvorené štyrmi dvojicami konceptuálnych a procedurálnych úloh, zameraných na analytickú geometriu. Procedurálnou úlohou rozumieme úlohu zameranú na ovládanie poznatku, alebo algoritmu. Konceptuálnou úlohou rozumieme úlohu, v ktorej žiak musí prepojiť svoje vedomosti a vzťahy medzi poznatkami. Pričom sme sa snažili zadať úlohu neštandardne, tak, že žiaci sa s takto zadanou úlohou ešte nestretli. Prvý didaktický test bol zadaný žiakom pred začiatkom tematického celku analytická geometria. Druhý didaktický test bol zadaný po tematickom celku.

Ukážka procedurálnej a konceptuálnej úlohy prvého didaktického testu v úvode tematického celku analytická geometria:

Úloha (P – procedurálna)
Určte skalárny súčin vektorov $\vec{u} = (3; 5)$ a $\vec{v} = (11; 7)$.

Úloha (K – konceptuálna)
Veronika riešila úlohu, ktorej časť zadania vyzerala takto: Určte ...., kde $A = [1; 2]$ a $B = [-2; 5]$. Čo mala Veronika určiť, ak úlohu riešila nasledovne (obrázok 1.) a jej riešenie je správne? Vysvetlite jej postup riešenia.



Obrázok 1. Veronikino riešenie úlohy.

Ukážka procedurálnej a konceptuálnej úlohy druhého didaktického testu na konci tematického celku analytická geometria:

Úloha (P - procedurálna)
Zistite vzájomnú polohu priamok p a q, ak $p : 2x–5y + 11 = 0$ a $q : 3x - 4y + 6 = 0$. (Pri rovnobežkách určte vzdialenosť, pri rôznobežkách priesečník priamok.)

Úloha (K - konceptuálna)
Majme priamku $p: 3x + 2y + 1 = 0$. Aké priamky vo vzťahu k priamke p patria do nasledujúcich množín priamok?

$$A = \{q : 3kx + 2ky + 1 = 0; \text{kde } k \text{je rôzne od } 0\}$$
$$A = \{q : 2kx - 3ky + 1 = 0; \text{kde } k \text{je rôzne od } 0\}$$
$$A = \{q : 3kx + 2ky + k = 0; \text{kde } k \text{je rôzne od } 0\}$$

Zároveň sme do výučby zaradili sebahodnotiace rubriky. Žiaci mali počas vyučovania tematického celku Analytická geometria k dispozícii postupne 4 vytvorené rubriky a k nim vytvorené série úloh. Sebahodnotiace rubriky sa postupne zameriavali na:

- parametrické vyjadrenie priamky,
- všeobecné vyjadrenie priamky,
- smernicové a úsekové vyjadrenie priamky,
- metrické vlastnosti.

Spôsob využitia našich materiálov sme nechali na rozhodnutí vyučujúcej. Dôležitou podmienkou bola samostatná práca žiakov. Vyučujúca sa nakoniec rozhodla tieto materiály využiť na dobrovoľnú domácu prípravu žiakov. Po ukončení tematického celku sme žiakov rozdelili na skupiny, podľa toho, či riešili danú rubriku, alebo nie. Následne sme porovnávali úspešnosť úloh skupiny žiakov, pracujúcich s rubrikou a tou, ktorá s ňou nepracovala. Na spracovanie výsledkov sme použili štatistický nástroj Mann-Whitney U test [7]. Keďže nie všetky dáta boli vhodne rozdelené, alebo ich bolo málo, niektoré porovnanie spracúvame len pomocou základných štatistických znakov teda priemeru a mediánu.

Séria úloh k ukážke priloženej rubriky:

1. Vyznačte do súradnicovej sústavy body A, B a vektor $\overrightarrow{AB}$. Načrtnite priamku AB a na nej ďalší bod X a určte jeho súradnice.
   a) $A = [1; 0],\ B = [5; 2]$
   b) $A = [2; 10],\ B = [1; 8]$
2. Určte druhú súradnicu bodu C tak, aby body ABC ležali na jednej priamke.
   a) $A = [3; 17]$,
   b) $B = [2; -8]$,
   c) $C = [1; c]$.
3. Zapíšte parametrické vyjadrenie priamok AB z úlohy 1.
4. Vyjadrite priamku AB v parametrickom tvare, ak poznáte súradnice bodov A, B.
   a) $A = [1; 3],\ B = [-1; 5]$,
   b) $A = [2; 5],\ B = [-2; 5]$,
   c) $A = [10; 4],\ B = [-2; -1]$.

Parametrické vyjadrenie priamky

Algoritmus	**Ľahké**	Viem zapísať priamku parametricky, ak poznám bod a smerový vektor.	úlohy 1 – 4
		Viem zapísať priamku parametricky, ak poznám 2 body priamky.	
		Viem rozhodnúť, či bod patrí priamke.	
		Dokážem parametricky zapísať časť priamky.	úloha 5
	Náročné	Viem zistiť vzájomnú polohu priamok pomocou zápisu priamky vyjadrenej parametricky.	úlohy 6 – 7
		Viem zistiť súradnice priesečníka dvoch rôznobežných priamok.	úloha 7
	Ľahké	Viem previesť parametrické vyjadrenie priamky do vyjadrenia všeobecnej rovnice priamky.	úloha 8
	Náročné	Viem previesť iné vyjadrenie priamky do parametrického tvaru.	úloha 9
	Ľahké	Rozumiem, čo znamená parametrický zápis priamky.	úloha 10
Koncept	**Náročné**	Rozumiem, ako vzniká parametrický zápis priamky.	úlohy 11 – 12

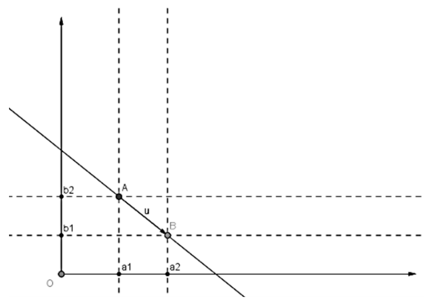
Tabuľka 1. Ukážka sebahodnotiacej rubriky, úlohy k nej uvádzame nižšie.

5. Poznáte súradnice bodov $A = [1; 3],\ B = [-1; 5]$. Vyjadrite:
   a) úsečku AB,
   b) polpriamku AB,
   c) polpriamku BA.
6. Zistite z parametrického vyjadrenia priamky vzájomnú polohu priamok k priamke $p: x = 2t + 4,\ y = -t$–1.
   a) $A = [5; 1],\ B = [3; 4]$
   b) $A = [5; 1],\ B = [3; 2]$
   c) $A = [1; 5],\ B = [2; 3]$
   d) $A = [6; -2],\ B = [8; -3]$
7. Zistite, v akej vzájomnej polohe sú priamky $p\colon\ 2x + 3y - 5 = 0$ a $q\colon\ x = 5t + 2,\ y = -t - 1,\ t \in \mathbb{R}$.
8. Preveďte priamku zapísanú v parametrickom tvare do všeobecnej rovnice priamky $x = 2t + 4, y = -t - 1,\ t \in \mathbb{R}$.

9. Preveďte priamku zapísanú všeobecnou rovnicou do parametrického tvaru: $3x + 4y - 25 = 0$.
10. Určte, do ktorej množiny patrí priamka $x = 2t + 5$, $y = -t + 2,\ t \in \mathbb{R}$. Svoj výber vysvetlite.

$$A = \{x = 2kt + 5,\ y = -t + 2,\ t \in \mathbb{R},\ k\ \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$
$$A = \{x = -2kt + 5, y = tk + 2,\ t \in \mathbb{R},\ k\ \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$
$$A = \{x = 2kt + 5k, y = -t + 2k,\ t \in \mathbb{R},\ k\ \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$

11. Vyjadrite priamku AB parametricky (pozri obrázok 2). Vyjadrite priamku rovnobežnú s priamkou AB a prechádzajúcou stredom sústavy O.



Obrázok 2. Obrázok k úlohe 11.

12. Aký bude parametrický zápis priamky p v sústave súradníc tvorenej vektormi $\overrightarrow{OA} = (0; 1)$ a $\overrightarrow{AB} = (1; 2)$?

$$p : x = t + 5,\ y = 2t + 2,\ t \in \mathbb{R}$$
$$p : x = 2t + 5,\ y = -t + 2,\ t \in \mathbb{R}$$
$$p : x = 2t + 5,\ y = 3t + 2,\ t \in \mathbb{R}$$

2 Výsledky výskumu

Najprv uvedieme porovnanie výsledkov v druhom didaktickom teste a prácu s rubrikami. Žiakov sme rozdelili na skupinu žiakov, ktorí pracovali s rubrikou a skupinu žiakov, ktorí s rubrikou nepracovali. U žiakov sme potom porovnávali úspešnosť v úlohe zameranej na daný poznatok. Skúmali sme potom odlišnosti medzi medzi oboma skupinami žiakov. Následne sme porovnávali úspešnosť týchto skupín v prvom didaktickom teste.

Sebahodnotiaca rubrika Parametrické vyjadrenie priamky

Táto sebahodnotiaca rubrika bola prvá, s ktorou žiaci pracovali, čo spôsobilo, že z 34 žiakov s ňou pracovala väčšina. Dostali sme odovzdaných 27 riešení, niektoré z nich síce neprešli až po konceptuálnu úroveň, ale z počtu spätne získaných riešení vyplýva, že žiaci javili o tento nástroj záujem. Na základe základných štatistických údajov vidíme (tabuľka 2), že žiaci, ktorí pracovali s rubrikou, boli úspešnejší v procedurálnej úlohe P1. Žiaci, ktorí pracovali s rubrikou, mali priemer v tejto úlohe na úrovni 2 body z 3, pričom žiaci, ktorí s ňou nepracovali, na úrovni 1,4 bodu. Na základe Mann--Whitney U testu môžeme tvrdiť, že na hladine významnosti 5 % existuje rozdielnosť úspešnosti v úlohe P1 procedurálnej časti testu 2 vzhľadom na použitú sebahodnotiacu rubriku parametrické vyjadrenie priamky.

	Počet	**Priemer**	**Medián**
Študenti, ktorí nepracovali s rubrikou	5	1,4	1
Študenti, ktorí pracovali s rubrikou	25	2	2

Tabuľka 2. Vyjadrenie porovnania úspešnosti v získaných bodoch procedurálnej úlohy zameranej na parametrické vyjadrenie priamky cez základné štatistiky

Pri konceptuálnej úlohe je tento rozdiel ešte vyšší. Zatiaľ čo priemer u žiakov, ktorí nepracovali s rubrikami, bol pod 1 bodom a medián bol 0 (tabuľka 3), tak u žiakov, ktorí pracovali s rubrikou, bol na úrovni 2,3 bodu a viac ako polovica žiakov vyriešila úlohu na plný počet bodov. Na základe Mann-Whitney U testu môžeme tvrdiť, že na hladine významnosti 5 % existuje rozdielnosť úspešnosti v úlohe K1 konceptuálnej časti testu 2 vzhľadom na použité sebahodnotiace rubriky parametrické vyjadrenie priamky. Tí, ktorí tieto materiály používali, majú úspešnosť vyššiu.

	Počet	**Priemer**	**Medián**
Študenti, ktorí nepracovali s rubrikou	18	0,9	0
Študenti, ktorí pracovali s rubrikou	12	2,3	3

Tabuľka 3. Vyjadrenie porovnania úspešnosti v získaných bodoch konceptuálnej úlohy zameranej na parametrické vyjadrenie priamky cez základné štatistiky

Sebahodnotiaca rubrika Všeobecné vyjadrenie priamky

Po vyhodnotení prvej rubriky sme boli zvedaví, či sa nám ukáže podobná súvislosť aj ďalej. Túto odovzdalo 18 žiakov, pričom polovica z ich prešla iba procedurálnou časťou. Pri jej vyhodnotení sme zistili, že neexistuje rozdiel v úspešnosti medzi žiakmi, ktorí pracovali s materiálmi a tými, ktorí s nimi nepracovali. Vidieť to aj zo základných štatistík v tabuľke 4, keďže priemer je rovnaký.

	Počet	Priemer	Medián
Študenti, ktorí nepracovali s rubrikou	12	2,1	3
Študenti, ktorí pracovali s rubrikou	18	2,1	2,5

Tabuľka 4. Vyjadrenie porovnania úspešnosti v získaných bodoch procedurálnej úlohy zameranej na všeobecné vyjadrenie priamky cez základné štatistiky

Pri porovnávaní úspešnosti žiakov v konceptuálnej časti sme zistili rozdiely v úspešnosti žiakov (tabuľka 5). Priemer žiakov, ktorí pracovali s rubrikou, bol lepší a taktiež medián. Aj na základe Mann-Whitney U testu môžeme tvrdiť, že na hladine významnosti 10 % existuje rozdielnosť úspešnosti v úlohe K2 konceptuálnej časti testu 2 vzhľadom na použité rubriky všeobecné vyjadrenie priamky.

	Počet	Priemer	Medián
Študenti, ktorí nepracovali s rubrikou	21	1,1	0
Študenti, ktorí pracovali s rubrikou	9	2,0	2,5

Tabuľka 5. Vyjadrenie porovnania úspešnosti v získaných bodoch konceptuálnej úlohy zameranej na všeobecné vyjadrenie priamky cez základné štatistiky

Sebahodnotiaca rubrika Metrické vlastnosti

S plynutím času, sa strácala aj motivácia žiakov z „novosti“ a sebahodnotiace hárky odovzdávalo menej žiakov. Z tejto časti sme dostali späť len 12 žiackych riešení.

Úspešnosť bola v prípade používania materiálov v procedurálnej úlohe vyššia, u žiakov, ktorí pracovali s rubrikou. Čo vidieť z vyššieho priemeru aj mediánu (tabuľka 6), na základe Mann-Whitney U testu môžeme tvrdiť, že na hladine významnosti 5 % neexistuje rozdielnosť v úspešnosti v úlohe P4 procedurálnej časti testu 2 vzhľadom na použité materiály „metrické vlastnosti“.

	Počet	Priemer	Medián
Študenti, ktorí nepracovali s rubrikou	19	1,6	2
Študenti, ktorí pracovali s rubrikou	11	2,2	3

Tabuľka 6. Vyjadrenie porovnania úspešnosti v získaných bodoch procedurálnej úlohy zameranej na metrické vlastnosti cez základné štatistiky

Podobne aj pri konceptuálnej úlohe je vidieť z priemeru a mediánu vyššiu úspešnosť žiakov pracujúcich so sebahodnotiacou rubrikou. Na základe Mann-Whitney U testu môžeme tvrdiť, že na hladine významnosti 5 % neexistuje rozdielnosť, ale existuje na hladine významnosti 10 % úspešnosti v úlohe K4 konceptuálnej časti testu 2 vzhľadom na použité sebahodnotiace materiály zamerané na metrické vlastnosti.

	Počet	Priemer	Medián
Študenti, ktorí nepracovali s rubrikou	25	0,5	0
Študenti, ktorí pracovali s rubrikou	5	1,5	2

Tabuľka 7. Vyjadrenie porovnania úspešnosti v získaných bodoch konceptuálnej úlohy zameranej na metrické vlastnosti cez základné štatistiky

Sebahodnotiacu rubriku zameranú na smernicový a úsekový tvar sme nevyhodnocovali, keďže ju riešili iba žiaci, ktorí chýbali na jednom z testov a teda sme ju nemali s čím porovnať. Porovnaním jednotlivých výsledkov teda môžeme vidieť, že žiaci, ktorí preriešili úlohy konceptuálnej úrovne jednotlivých rubrík dosiahli v konceptuálnych úlohách lepšie výsledky. Na základe týchto výsledkov však nemôžeme jednoznačne konštatovať, že sebahodnotiace rubriky mali zásadný vplyv na porozumenie žiakov. Preto sme sa rozhodli porovnávať úspešnosť jednotlivých žiakov v prvom didaktickom teste.

Porovnanie s prvým didaktickým testom

Didaktický test 1 mal podobný koncept ako test 2. Skladal sa zo štyroch úloh procedurálnej časti a štyroch konceptuálnych úloh. Znova sme porovnávali obe časti zvlášť. Žiakov sme rozdelili na tých, ktorí pracovali s materiálom a tých, ktorí ho nepreriešili. Vzhľadom na zmenšujúcu vzorku sme porovnávali žiakov pracujúcich s každou rubrikou zvlášť. Skúmali sme, či existuje rozdiel medzi týmito skupinami.

Z analýzy výsledkov procedurálnej časti vyplýva, že existuje štatisticky významný rozdiel medzi skupinami, ktoré pracovali s rubrikou všeobecná rovnica priamky a metrické vlastnosti. Tieto skupiny boli lepšie v teste 1. Pričom žiaci, ktorí pracovali s rubrikami, mali lepšie výsledky. Teda je pravdepodobné, že žiaci, ktorí pracovali s rubrikami, by v procedurálnej časti dosiahli lepšie výsledky aj bez použitia sebahodnotiacich rubrík. Pri výsledkoch konceptuálnych úloh pri každej rubrike, na základe Mann-Whitney U testu môžeme konštatovať, že neexistuje rozdiel medzi jednotlivými skupinami vo všetkých troch rubrikách. Vyplýva to už zo základných štatistík (tabuľka 8). Napríklad priemer konceptuálnej časti testu 1 žiakov, ktorí nepracovali s rubrikami, bol 4,03 z 12 bodov a medián 3,5 a priemer konceptuálnej časti 1 testu žiakov, ktorí neskôr pracovali s rubrikami, bol 4,41 a medián 3,0. Z tohto pozorovania vyplýva, že s rubrikou pracovali rôzni žiaci a nie len žiaci, ktorí dosahujú dlhodobo výborné výsledky a test 2 by napísali aj tak lepšie. Tieto výsledky sú zhrnuté v nasledujúcej tabuľke.

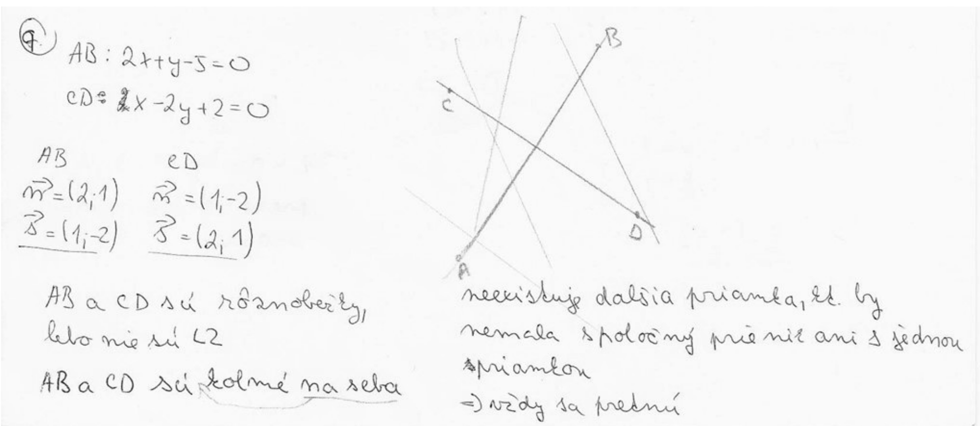
Na základe týchto výsledkov môžeme tvrdiť, že žiakom práca so sebahodnotiacimi rubrikami pomohla práve v riešení konceptuálnych úloh, a teda k lepšiemu porozumeniu učivu. Pri procedurálnej časti tieto výsledky takto nemôžeme interpretovať.

	Študenti, ktorí pracovali s rubrikami		Študenti, ktorí nepracovali s rubrikami	
	Priemer	**Medián**	**Priemer**	**Medián**
Parametrické vyjadrenie priamky	4,4	3	4,0	3,5
Všeobecné vyjadrenie priamky	5,9	4,5	3,4	2,5
Metrické vlastnosti	7,6	9	3,7	2,5

Tabuľka 8. Vyjadrenie porovnania úspešnosti v teste 1 u žiakov, ktorí pracovali a nepracovali s rubrikami v získaných bodoch

Na ukážku sme sa rozhodli vybrať riešenie jedného žiaka, volajme ho Ivan. Ivan síce procedurálnu časť oboch testov zvládol nadpriemerne dobre, ale o konceptuálnej časti sa to nedá povedať. Z konceptuálnej časti prvého testu získal len 0,5 bodu z 12 (pričom priemer bol na úrovni 4,05 bodu). Následne práca Ivana s rubrikami bola systematická, odovzdal všetky skúmané rubriky a úlohy boli vyriešené, čiastočne aj s komentármi. Vyberme si napríklad ukážku rubriky Všeobecná rovnica priamky. Keďže nás zaujíma konceptuálna časť, pozrime sa na úlohu z konca rubriky.

Úloha 9: Priamka p má rovnicu $2x + y - 5 = 0$ a priamka CD má všeobecnú rovnicu $x - 2y + 2 = 0$. Nájdite priamku, ktorá nemá spoločný prienik ani s jednou priamkou.



Obrázok 3. Ukážka Ivanovho riešenia úlohy 9 sebahodnotiacej rubriky zameranej na všeobecnú rovnicu priamky

Na riešení je vidieť, že sa zameral najprv na výpočet (teda žiak nevidel na prvý pohľad a musel si to overiť výpočtom, že priamky nie sú rovnobežné), po výpočte si svoje zistenie overil náčrtom a následne vyvodil, že takáto priamka neexistuje. A hoci chýba presné vyjadrenie, môžeme predpokladať, že žiak si tento poznatok uvedomil, aj napriek tomu, že to nezdôvodnil. V konceptuálnej časti druhého testu získal Ivan za úlohu zameranú na všeobecné riešenie priamky plný počet bodov. Okrem toho za konceptuálnu časť druhého testu získal 6 bodov (priemer bol 4,10 bodu). Hoci teoreticky mal potenciál dosiahnuť viac, ale v jednej úlohe zabudol druhú časť úlohy a jednu úlohu nestihol dokončiť. Aj na základe toho usudzujeme, že naša hypotéza, že žiakom sebahodnotiace rubriky pomohli s porozumením, je správna.

Aký názor majú žiaci na používanie sebahodnotiacich rubrík?

Vzhľadom na to, že sebahodnotiace rubriky by mali slúžiť najmä žiakom, zaujímal nás aj ich názor na tento nástroj hodnotenia. Žiaci mali odpovedať na tieto otvorené otázky:

- Ako si používal/a sebahodnotiace rubriky?
- Vrátil/a si sa k nim po čase?
- Mali vplyv na tvoje učenie?
- Mali vplyv na tvoje porozumenie analytickej geometrie?
- Ako sa ti pozdávali sebahodnotiace rubriky z časového hľadiska a z hľadiska členenia? (bolo ich málo, veľa? Mali byť podrobnejšie alebo viac všeobecné?)

Z odpovedí žiakov sme vybrali ukážku doslovného prepisu žiackych odpovedí.

Ako si používal sebahodnotiace rubriky? A: Rubriky som používala, aby som sa zamyslela nad tým, čo viem a nad tým, čo ešte potrebujem vedieť, porovnávala som si aj vedomosti pred vypracovaním zadania a po jeho vypracovaní. Posudzovala som tak moje vedomosti. B: Používala som ich ako prípravu na písomku, učila som sa na písomku pomocou zadaní. C: Bral som to ako zadanie za body. D: Najprv som to brala ako domácu, ale keďže to šlo paralelne s učivom a bola písomka, tak som si povedala, že to prepočítam, lebo je to ako príprava. E: Používal som to pred písomkou a to tak, že najprv som si v rubrikách pozrel čo viem, čo neviem, ohodnotil som sa, riešil príklady a vrátil sa späť či som sa dobre ohodnotil.

Vrátil si sa k nim? A: Áno, vrátila som sa, keď som si chcela zistiť, čo som sa naučila. B: Nie, nevrátila som sa aj potom. Bolo to zbytočné... keď už bola písomka napísaná. E: Áno, vrátil, aby som videl či je odhad mojich vedomostí správny... nie vždy bol...

Mali vplyv na tvoje učenie? A: Myslím, že okruhy, témy čo sa mám naučiť, by som si mohla pozrieť aj v zošite, teda neviem, či mi to nejak extra pomohlo. B: Jednoznačne mali vplyv na moje učenie, ak som príklady nevedela, pozrela som si v rubrikách, aká to je téma, skúsila som podobne riešený príklad nájsť v zošite a vyriešiť ten v zadaní. Tak som sa vlastne aj učila... Myslím, že je to dobrý nápad, lebo som mala niečo hmatateľné, vďaka čomu som sa mohla venovať príprave na písomku. C: Nie nepomohli mi, bral som to ako domácu. Je to fajn, len asi tým, že to beriem ako domácu a nie sme zvyknutí mať takto rozpracované učivo na témy, tak neviem či to pre mňa malo zmysel. D: No jasne, pomohlo, mala som sa z čoho učiť, bol tam nejaký prehľad, mohla som ísť podľa toho. Viem si to predstaviť aj na iných predmetoch, keďže si často pred písomkami robím nejaký stručný obsah alebo osnovu, čo sa budem učiť a ako sebahodnotenie. E: Asi tým, že som mal prehľad mi to pomohlo, aj keby som si pozrel len v zošite, ale takto to je na jednej kope. Vedel by som si to predstaviť na začiatku učiva, prehľad, že čo sa budeme učiť, lebo inak mám pocit, že niekedy neviem čo, s čím súvisí, takto to malo nejakú postupnosť. A takisto aj na konci učiva, prehľad, čo som sa naučil a mal by som vedieť.

Z odpovedí je zrejmé, že hoci systém nevyhovuje všetkým žiakom, sú žiaci, ktorým práve podobný systém prepojenia na hodinách matematiky chýba.

3 Záver

Práca so sebahodnotiacimi rubrikami môže byť pre aktérov vyučovania prospešná. Z výsledkov výskumu vidieť vzťah medzi používaním rubrík a úspešnosťou v konceptuálnych úlohách. Avšak, z dôvodu malého množstva žiakov zapojených do výskumu, a teda relatívne malej vzorky, nemôžeme vyvodiť všeobecný záver, že by existovala závislosť medzi používaním sebahodnotiacich rubrík a lepším porozumením žiakov na hodinách matematiky. Považujeme to však za hypotézu, ktorú je potrebné ďalej verifikovať. Zo spätnej väzby žiakov usudzujeme, že tento nástroj sebahodnotenia je pre žiakov atraktívny a veľmi prehľadný. Uvítali by jeho využívanie vo vyučovaní matematiky. Používanie sebahodnotiacich rubrík má potenciál byť jedným z vhodných nástrojov na prehlbovanie žiackeho porozumenia, ktoré je obzvlášť v matematike veľmi potrebné a môže pôsobiť ako silná vnútorná motivácia žiakov.

Literatúra – References

[1] Boud, D., Falchikov, N.: *Quantitative studies of student self-assessment and peer assessment*. Higher Education, 18 (5), 1989.

[2] Boud, D., Falchikov, N.: *Aligning assessment with long-term learning*. Assessment & Evaluation in Higher Education, 31(4), 2006.

[3] Gábová, T.: *Sebahodnotenie – nástroj formatívneho hodnotenia ako súčasť učenia sa*. Obzory matematiky, fyziky a informatiky, 49 (1), 2020.

[4] Sambell, K., McDowell, L. and Montgomery, C.: *Assessment for Learning in Higher Education*. Routledge: Oxon, 2013.
[5] Taras, M.: *Student self-assessment: processes and consequences*. Teaching in Higher Education, 15(2), 2010.
[6] Tomšik, R.: *Kvalitatívny výskum v pedagogických vedách*, Pedagogická fakulta Konštantína Filozofa v Nitre, 2017.
[7] Wiliam, D.: *Embedded Formative Assessment*. Bloomington: Solution Tree Press, 2011.
[8] Wiliam, D., Leahy, S.: *Embedding Formative Assessment*. West Palm Beach : Learning Sciences International, 2015.
[9] `https://teaching.utoronto.ca/teaching-support/active-learning-pedagogies/continuum/self-assessment/`
[10] Wride, M.: *Guide to Self-Assesment*, Academic practice, University of Dublin Trinity College 2017.

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou projektu KEGA 020UPJŠ-4/202.

Adresy autorov:

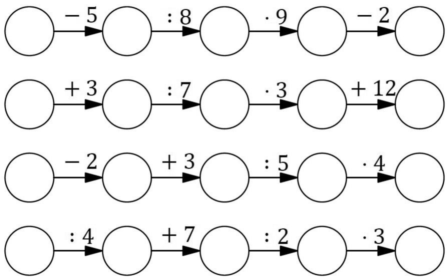
Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika,
Jesenná 5, 040 01 Košice

e-mail: `timea.gabova@gmail.com, dusan.sveda@upjs.sk`

Zadania úloh 71. ročníka Matematickej olympiády

Kategória Z5

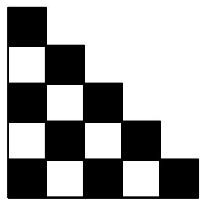
Úloha Z5-I-1. (*Miroslava Farkas Smitková*) Do kruhových políčok doplňte prirodzené čísla od 1 do 20 tak, aby každé číslo bolo použité práve raz a súčasne platili všetky uvedené vzťahy.



Úloha Z5-I-2. (*Iveta Jančigová*) Trpaslíci natierali kocky zelenou a bielou farbou tak, že každá stena bola celá ofarbená jednou z týchto dvoch farieb. Po chvíli si všimli, že niektoré ofarbené kocky vyzerajú po vhodnom pootočení úplne rovnako, a začali ich podľa toho triediť do skupín (v rovnakej skupine sú rovnako ofarbené kocky). Najviac koľko skupín mohli takto dostať?

Úloha Z5-I-3. (*Eva Semerádová*) Adam prepočítaval svoju zbierku dúhových guľôčok. Zistil, že ich môže rozdeliť do rovnako početných kôpok, a to viacerými spôsobmi. Keby ich rozdelil do troch kôpok, bolo by v každej kôpke o osem guľôčok viac, než by bolo v každej kôpke pri delení do štyroch kôpok. Koľko mal Adam dúhových guľôčok?

Úloha Z5-I-4. (*Michaela Petrová*) Jaro vystrihol z rohu šachovnice útvar vpravo pozostávajúci z pätnástich polí. Následne odstrihol niekoľko ďalších polí, a to tak, že výsledný útvar neobsahoval diery a nerozpadal sa, mal rovnaký počet čiernych a bielych polí a mal najväčší možný obsah. Navyše zistil, že zo všetkých možných útvarov s týmito vlastnosťami mal ten jeho najväčší možný obvod. Ktoré polia Jaro dodatočne odstrihol? Určte všetky možnosti.



Úloha Z5-I-5. (*Karel Pazourek*) Na papieri bol narysovaný štvorec $ABCD$ so stranou 4 cm. Pavol zostrojil vrcholy obdĺžnika, ktorý mal trikrát väčší obsah než štvorec $ABCD$. Pritom rysoval iba kružnice, pretože pravítko nenašiel. Ako mohol Pavol postupovať? Popíšte aspoň jednu konštrukciu.

Úloha Z5-I-6. (*Monika Dillingerová*) Na parkovisku stáli autá a bicykle. Ak by prišlo jedno ďalšie auto, bolo by ich rovnako veľa ako bicyklov. Ak by prišlo päť ďalších bicyklov, mali by všetky bicykle rovnaký počet kolies ako všetky autá. Koľko stálo na parkovisku áut a koľko bicyklov?

Kategória Z6

Úloha Z6-I-1. (*Miroslava Farkas Smitková*) Môj jediný syn sa narodil, keď som mala 37 rokov. To bolo práve 32 rokov po smrti dedka, ktorý zomrel, keď mal 64 rokov. Dedko bol o 12 rokov starší než babka, brali sa v roku 1947, práve keď mala babka 18 rokov. V ktorom roku sa narodil môj syn?

Úloha Z6-I-2. (*Karel Pazourek*) Peter mal obdĺžnik šírky 2 cm a neznámej dĺžky. Radka mala obdĺžnik šírky 2 cm, ktorého dĺžka bola rovná obvodu Petrovho obdĺžnika. Keď k sebe obdĺžniky priložili ich šírkami, získali nový obdĺžnik s obvodom 63 cm. Určte obsah Petrovho obdĺžnika.

Úloha Z6-I-3. (*Veronika Hucíková*) Miška skúma čísla, ktoré sa dajú vyjadriť ako súčet aspoň dvoch po sebe idúcich prirodzených čísel. Obzvlášť ju zaujímajú čísla, ktoré sa takto dajú vyjadriť viacerými spôsobmi (napr. $18 = 5+6+7 = 3+4+5+6$). Čísla, ktoré možno takto vyjadriť aspoň tromi spôsobmi, nazvala *veľkolepé*. Nájdite aspoň tri Miškine veľkolepé čísla.

Úloha Z6-I-4. (*Michaela Petrová*) Kubo si napísal štvormiestne číslo, ktorého dve číslice boli párne a dve nepárne. Ak by v tomto čísle vyškrtol obe párne číslice, dostal by číslo štyrikrát menšie, než keby v ňom vyškrtol obe nepárne číslice. Aké najväčšie číslo s týmito vlastnosťami si mohol Kubo napísať?

Úloha Z6-I-5. (*Libuše Hozová*) Mojmír rozstrihal pravidelný šesťuholník na 12 zhodných dielov. Z týchto dielov (nie nutne zo všetkých) skladal rozličné pravouhlé trojuholníky. Ako mohli Mojmírove zložené trojuholníky vyzerať? Nájdite aspoň štyri možnosti.

Úloha Z6-I-6. (*Libuše Hozová*) Pätica kamarátov porovnávala, koľko starého železa priviezli do zberu. Priemerne to bolo 55 kg, avšak Ivan priviezol len 43 kg. Koľko kilogramov v priemere priviezli bez Ivana?

Kategória Z7

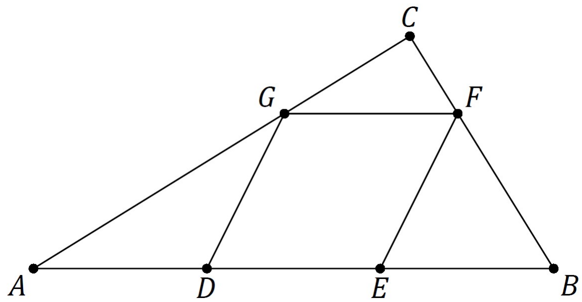
Úloha Z7-I-1. (*Iveta Jančigová*) Dážďovka špirálová razí nový tunel: Najprv mieri $10\,\mathrm{cm}$ na sever, potom $11\,\mathrm{cm}$ na východ, potom $12\,\mathrm{cm}$ na juh, $13\,\mathrm{cm}$ na západ a tak ďalej (každý úsek je o $1\,\mathrm{cm}$ dlhší než predchádzajúci, smery opakuje podľa uvedeného vzoru).

Dážďovka súradnicová mapuje dielo svojej kolegyne: Začiatok tunela označí súradnicami $(0, 0)$, prvú odbočku súradnicami $(0, 10)$, druhú odbočku $(11, 10)$ a tak ďalej.

Určte súradnice konca úseku, ktorý má dĺžku $100\,\mathrm{cm}$.

Úloha Z7-I-2. (*Libuše Hozová*) Súčin vekov všetkých detí pána Násobka je 1408. Vek najmladšieho dieťaťa je rovný polovici veku najstaršieho dieťaťa. Koľko detí má pán Násobok a koľko majú rokov?

Úloha Z7-I-3. (*Iveta Jančigová*) Na stranách trojuholníka ABC sú dané body D, E, F, G (pozri obrázok). Pritom platí, že štvoruholník $DEFG$ je kosoštvorec a úsečky AD, DE a EB sú navzájom zhodné.



Určte veľkosť uhla ACB.

Úloha Z7-I-4. (*Miroslava Farkas Smitková*) Jožko vymyslel nasledujúcu úlohu:

$$M + A + M + R + A + D + M + A + T + E + M + A + T + I + K + U = ?$$

Rôzne písmená nahradzoval rôznymi číslicami od 1 do 9 a zisťoval, čo vychádza.

a) Aký najväčší výsledok mohol Jožko dostať?
b) Mohol dostať výsledok 50? Ak áno, ako?
c) Mohol dostať výsledok 59? Ak áno, aké hodnoty mohol mať v takom prípade súčet $M + A + M$?

Úloha Z7-I-5. (*Michaela Petrová*) Jano vyrazil do sveta s batôžkom buchiet. Na prvom rázcestí stretol Dlhého, Širokého a Bystrozrakého a spravodlivo sa s nimi o svoje buchty rozdelil – každý dostal štvrtinu buchiet. Jano zo svojho dielu zjedol dve buchty a šiel ďalej. Na druhom rázcestí stretol Plavčíka a Vratka a aj s nimi sa spravodlivo rozdelil – každý dostal tretinu zvyšných buchiet. Jano zo svojho dielu zjedol zasa dve buchty a so zvyšnými vyrazil ďalej. Na treťom rázcestí stretol Snehulienku. Aj s tou sa spravodlivo rozdelil, takže obaja mali polovicu zvyšných buchiet. Keď Jano zjedol opäť svoje dve buchty, bol batôžtek prázdny, a tak sa vrátil domov. S koľkými buchtami vyrazil Jano do sveta?

Úloha Z7-I-6. (*Libuše Hozová*) Pán Chrt mal vo svojom záprahu päť psov – Alíka, Broka, Muka, Rafa a Punťa. Koľkými spôsobmi ich mohol zapriahnuť do radu za sebou tak, aby bol Alík pred Punťom?

Kategória Z8

Úloha Z8-I-1. (*Karel Pazourek*) Vierka z troch daných číslic zostavovala navzájom rôzne trojmiestne čísla. Keď všetky tieto čísla sčítala, vyšlo jej 1221. Aké číslice Vierka použila? Určte päť možností.

Úloha Z8-I-2. (*Eva Semerádová*) TRN a HAM sú zhodné rovnostranné trojuholníky. Pritom bod T je ťažiskom trojuholníka HAM a bod R leží na polpriamke TA. Aký je pomer obsahov častí trojuholníka TRN, ktoré sú vnútri trojuholníka HAM, a tých, ktoré sú mimo neho?

Úloha Z8-I-3. (*Tomáš Bárta*) Na novoobjavenej planéte žijú zvieratá, ktoré astronauti pomenovali podľa počtu nôh jednonožky, dvojnožky, trojnožky a tak ďalej (zvieratá bez nôh tam neboli). Zvieratá s nepárnym počtom nôh majú dve hlavy, zvieratá s párnym počtom nôh majú jednu hlavu. V istej priehlbine stretli skupinu takých zvierat a napočítali na nich 18 hláv a 24 nôh. Koľko zvierat mohlo byť v priehlbine? Určte všetky možnosti.

Úloha Z8-I-4. (*Karel Pazourek*) V danej skupine čísel je jedno číslo rovné priemeru všetkých, najväčšie číslo je o 7 väčšie než priemer, najmenšie je o 7 menšie než priemer a väčšina čísel zo skupiny má podpriemernú hodnotu. Aký najmenší počet čísel môže byť v skupine?

Úloha Z8-I-5. (*Libuše Hozová*) V pravidelnom päťuholníku $ABCDE$ je obsiahnutý rovnostranný trojuholník ABM. Určte veľkosť uhla BCM.

Úloha Z8-I-6. (*Iveta Jančigová*) Alenka dostala list papiera s nasledujúcimi tvrdeniami:

A: Najviac jedno z tvrdení A, B, C, D, E je pravdivé.

B:

C: Všetky tvrdenia A, B, C, D, E sú pravdivé.

D:

E: Tvrdenie A je pravdivé.

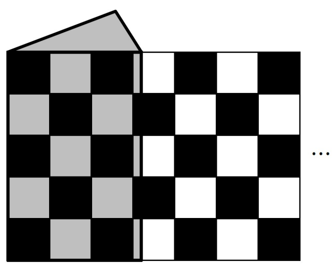
Tvrdenia B a D boli napísané neviditeľným atramentom, ktorý sa dá prečítať len pod špeciálnou lampou. Aj bez takejto lampy však Alenka dokázala rozhodnúť, či môže týmto tvrdeniam dôverovať. Určte i vy, ktoré z tvrdení A, B, C, D, E sú pravdivé a ktoré nepravdivé.

Kategória Z9

Úloha Z9-I-1. (*Michaela Petrová*) Adam, Boris a Cyril porovnávali, koľko kilogramov gaštanov nazbierali. Zistili, že aritmetický priemer toho, čo nazbieral Adam s Borisom, je o 10 kg väčší než Cyrilov príspevok, a aritmetický priemer toho, čo nazbieral Adam s Cyrilom, je o 3 kg menší než Borisov príspevok. Určte rozdiel medzi aritmetickým priemerom toho, čo nazbierali Boris s Cyrilom, a Adamovým príspevkom.

Úloha Z9-I-2. (*Iveta Jančigová*) Jana si vymyslela 2022-miestne číslo a jeho ciferný súčet pošepkala Petrovi. Peter vypočítal ciferný súčet čísla, ktoré mu povedala Jana, a výsledok pošepkal Zuzke. Zuzka tiež vypočítala ciferný súčet čísla, ktoré dostala od Petra, a výsledok, ktorým bolo dvojmiestne číslo, pošepkala Adamovi. Adam urobil to isté s číslom od Zuzky a vyšiel mu ciferný súčet 1. Ktoré čísla mohol pošepkať Peter Zuzke? Určte všetky možnosti.

Úloha Z9-I-3. (*Karel Pazourek*) Je daný pravidelný trojboký hranol s podstavnou hranou dĺžky 3,2 cm a výškou 5 cm. Jeho plášť omotávame šachovnicovou fóliou, ktorá pozostáva z nepriehľadných a priehľadných štvorcových polí so stranami dĺžky 1 cm. Začiatok fólie lícuje s hranou hranola (pozri obrázok vedľa) a jej dĺžka vystačí práve na dvojnásobné omotanie celého plášťa. Koľko percent plášťa hranola bude po omotaní viditeľných cez fóliu? Hrúbku fólie zanedbajte.



Úloha Z9-I-4. (*Karel Pazourek*) Konvexný štvoruholník $ABCD$ so stranou AB dĺžky 5 cm, so stranou BC dĺžky 3 cm a s uhlom BCD veľkosti $60°$ je súmerný podľa uhlopriečky AC. Bod E je pätou kolmice z vrcholu B na stranu AD a F je pätou kolmice z vrcholu D na stranu BC. Určte obvod a obsah štvoruholníka $DEBF$.

Úloha Z9-I-5. (*Karel Pazourek*) Vodník Gebuľa nakupoval v obchode, kde ceny všetkého tovaru boli uvedené v celých šupinkách. Keby Gebuľa kúpil 2 raky, 3 škeble a 1 šťuku, zaplatil by 49 šupiniek. Ak by prikúpil ešte 5 rakov, 11 škeblí a 1 šťuku, platil by celkovo 154 šupiniek. Koľko šupiniek by platil za 1 raka, 2 škeble a 3 šťuky? Určte všetky možnosti.

Úloha Z9-I-6. (*Libuše Hozová*) Sú dané dve rôzne čísla. Ak od oboch odčítame štvrtinu menšieho z nich, dostaneme čísla, z ktorých jedno bude päťkrát väčšie než druhé. Koľkokrát je dané väčšie číslo väčšie než to menšie?

Za Slovenskú komisiu Matematickej olympiády spracoval Stanislav Krajči
e-mail: `stanislav.krajci@upjs.sk`

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2021 (50)

Complex Physics Competition Involving Future Teachers

Magdolna Szádeczky-Kardoss, András Juhász and Péter Tasnádi

Abstract In this paper, we present the experience obtained with complex physics competitions which were organized every year of the last three decades for the students at catholic secondary schools in Hungary. The competition has consisted of various parts (problem-solving, experimental demonstration, group quiz, and a home project). We would like to present some examples highlight the focus of these activities and discussing the possibilities of bringing these activities to an average physics class. This complex system ensured that every student was able to find a part of the competition which attracts him. The organising team of the competition includes not only teachers from universities and high school but also pre-teachers who are given to opportunity to work with talented and enthusiastic students.

Key words: students' complex competition, physics, problem-solving, experiments, group quiz, high school

Súhrn: V príspevku predstavujeme skúsenosti s komplexnou fyzikálnou súťažou, ktorá sa v posledných troch desaťročiach organizuje každý rok pre žiakov stredných katolíckych škôl Maďarska. Súťaž pozostáva z rôznych častí (riešenie problémových úloh, predstavenie experimentov, skupinový kvíz, domáce projekty). Chceme bližšie predstaviť podstatu týchto aktivít, a rozobrať možnosti ich zaradenia do bežných aktivít žiakov v triede. Predstavený komplexný systém garantuje, že každý žiak vie nájsť tú časť súťaže, ktorá ju priťahuje. Organizačný tím pozostáva nie len z univerzitných a stredoškolských učiteľov, ale tiež z budúcich učiteľov fyziky, ktorí využívajú možnosť pracovať s talentovanými žiakmi.

Kľúčové slová: komplexná súťaž žiakov, fyzika, problémové úlohy, experimenty, skupinový kvíz, stredná škola

MESC: M50

1. The description of the competition

Physics competitions in high schools play a big role in developing students' skills in physics and increasing their interest in science. Both national and international competitions are targeting the most talented students with the intention of improving their problem-solving skills. Nevertheless, these competitions are only successful if they include a wide range of students not only just the best ones. However, the number of participants in traditional competitions has been declining for years. Furthermore, fewer students are interested in science both nationally and internationally too. For this reason, our goal was to create a competition where students could discover the beauty of physics and compete without stress – so it is likely that more students will take part in them. Producing the competition, we took four aspects into consideration: i. as far as it is possible, preserve the traditions of physics competitions, ii. to exploit the cooperative activities (group work) of students, iii. to rely on the students' enthusiasm for self-made experiments, iv to make the competition a public event with a larger audience.

In this paper, we are going to present our experience obtained through the decades of the competitions. We believe that *Károly Ireneusz Physics Competition,* besides that it has made young students love physics it has also motivated teachers too.

The competition is organized for three different age groups (for 13-14; 15-16; and 17-18 years old, respectively) and it has three different rounds. The diversity of the tasks varies from round to round. In the first-round students should make a home project, the second-round contains traditional problem-solving and the last-round is about performing and explaining a variety of experiments. The schools should apply at the beginning of the first semester. Then the contestants have 4 months to make a project in groups which is the first challenge of the competition. The next two rounds are hosted by one of the schools participating in the competition during the spring semester. Each group sends two students who represent their school in the competition. The delegated students are accompanied by their schoolteachers.

2. Goals

Informal learning is becoming increasingly important when students are not studying at school. One way to do this is to take part in competitions, as success often requires knowing much more than the curriculum or solving non-school tasks. They not only develop their professional knowledge, but also their attitudes towards science, especially physics, group research and their scientific approach. The success of the competition and the prize won can be an additional motivation for (further) learning and participation in other competitions. 0

Our purpose is not just to improve the students' knowledge of physics. In the first-round, students are required to work on a mini-research, they must learn how to cooperate with each other. To finish the report students also need to deal with different computer programs. With this competition we have more goals. Firstly, our aim is to motivate students by showing them the beauty of physics. Secondly, to help teachers improve their professional skills, and thirdly, to introduce the method of helping talented students to pre-teachers.

3. Home project

More and more modern teaching methods consider self-learning important, when students are not only passive recipients of knowledge, but also develop their talents independently with the help of experts. This is most easily accomplished through teamwork, which also develops the communication and collaboration skills of participants, which will become important later. [5]

The Competition Committee sets research topics from extracurricular material for each category. The students should do their projects in groups and their teachers are allowed to help them. The first round gives the opportunity to those students whose main interest maybe not physics but enjoy doing experiments.

In the first-round, students are asked to do a home-project. In the first decade of the competition the oldest students were given open-ended questions and activities which were chosen from the activities of the International Young Physicists' Tournament 0. As these tasks were much more challenging for the students and required more effort, the number of participants in the competition began to decline. In the years that followed, the judges tried to simplify the activities to stop the decline in the number of participants. Nevertheless, the goal of the competition remained the same which was to give students activities connected to real life situations.

Some examples: Experiments with paper airplanes (13-14 y.), Experiments with polarized light (15-16 y.), Experiments with musical instruments (13-14 y.), Smartphones in physics (15-16 y.), Experiments with colours (13-14 y.).

4. Problem-solving

Two representatives are sent by each group for problem-solving, which is the main activity of traditional physics competitions. Although the frames of the problem-solving part agree with those of the traditional ones the problems are unusual, many of them join to experiments shown at the scene. The tests are corrected by teachers and by university students who are in the teacher training program. We are presenting three examples from this part of the competition.

4.1 How much sugar contains a bottle of coke?

Problem: Find out the sugar content of the Coke with the help of Fig. 1. The bottle's height is 15 cm, the radius is 2.9 cm. Fig. 1 is very similar to what was given to the students.

Solution: While the Coke made with sugar totally immerses in the water, the other bottle is floating and one part of it is above water. This information is the key for students to calculate the mass of the sugar. The buoyancy acting on the difference of immersed volumes of bottles is the same as the weight of the sugar:

***Fig. 1**: Two bottle of coke in water.*

$$m_{\text{sugar}}\, g = \rho_{\text{water}}\, R^2 \pi h g.$$

Here h is the difference in the heights of the immersed parts of the bottles. Hence, the weight of the sugar $m_{\text{sugar}} \approx 26$ g.

4.2 Matchbox

Problem: I would like to introduce one of the experiments presented at the competition. First, one drops a box of matches (the box is half full) in vertical position on the table from approximately 10 cm high. After hitting the table, the closed box of matches bounces a little and falls over. Second, we repeat the entire experiment however, this time the box is half open. This time the box does not fall over but the half open box closes however, not entirely. The students should explain the phenomenon: Find out the friction force created by the box and the closing part of the box. (Fig. 2 can provide some guidance and help students solve the problem.) The mass of the box is 8 g. (In the competition, the center of gravity was not marked in the picture.)

Solution: When the closed box hits the table the position of the matches in the closed box changes and this change causes the fall of the closed box. If we repeat the experiment with the box half opened, the collision between the box and the table is inelastic, the open part of the box continues its motion after the box hits the table and the kinetic energy transforms into the work of the friction force. With the help of Fig. 2 we can estimate the displacement and the work of the friction force too.

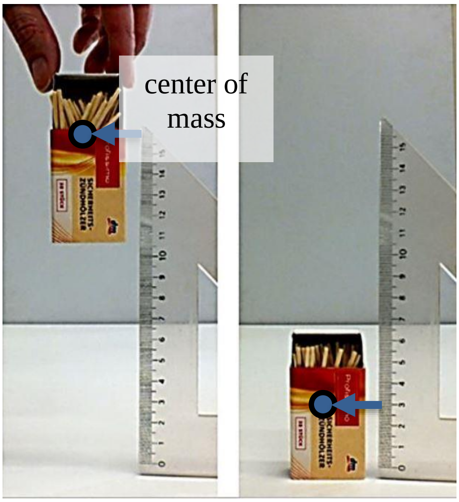


Fig. 2: *Matchbox before and after the fall*

The left side of Fig. 2 shows the box of matches before the fall and the right side of Fig. 2 demonstrates the box after the fall. After the box hits the ground and the main part stops moving, the open part continues its motion because of inertia. The friction force between the main part and the open part of the box slows down the motion of the open part of the box. To sum up, the box had potential energy which first transforms into kinetic energy and later it transforms into the work of the friction force. We can calculate the work done by friction from the product of the friction force F_f and the displacement Δs of the center of mass relative to the box

$$W_f = F_f \, \Delta \, s.$$

The change of the potential energy (ΔE) is defined by the mass (M) and the change of the height (Δh) of the centre of the mass of the box relative to the table

$$\Delta E_p = Mg\Delta h.$$

Fig. 2 can help identifying the change of heights of the centre of the mass and the displacement of the open part of the box. The change of height of the mass of the centre marked on the photo is $\Delta \, h \approx 13$ cm. The displacement of the open part of the box after it hits the ground is $\Delta \, s \approx 1{,}5$ cm. The magnitude of the friction force

$$F_f = \frac{Mg\Delta h}{\Delta \, s} \approx 0{,}68 \text{ N}.$$

<u>Notes:</u> As a teacher, we can present this experiment as a trick to our students and encourage them to try it on their own because the tools needed for the experiment are very simple. It also provides an opportunity to discuss how the number of match-sticks can affect the experiment and why. (For example, we can do the experiment first with an empty box and later with a box full of matchsticks. We can also change the size of the box.)

4.3 Turning airplane

Fig 3: Airplane.

Problem: Can you calculate the angle of the airplane's turn with the help of the picture if you know that its speed is 100 m/s, and its height does not change during the turn? What is the connection between the radius and the mass of the airplane?

Solution: The aerodynamic force acting on the airplane is always perpendicular to the wings of the airplane. If the airplane does not have a horizontal position, it automatically changes

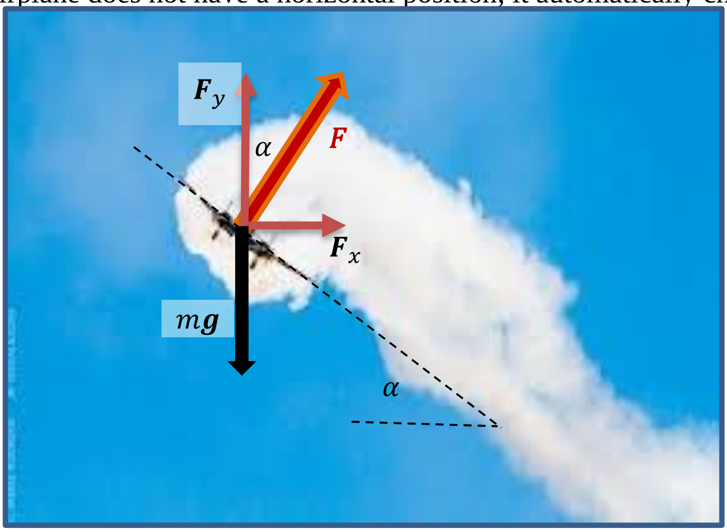


Fig. 4: *Free-body diagram of the forces.*

the direction of flights and turns. The radius of the turn's circle (the aircraft's trajectory) can be determined by the forces acting on the plane (see Fig. 4). The two main forces are the gravitational force ($m\boldsymbol{g}$), which acts vertically on the aircraft, and the aerodynamic force ($\boldsymbol{F}$), which acts perpendicular to the plane of the wings. Since the altitude of the aircraft does not change, the magnitude of the vertical component of the force $\boldsymbol{F}$ is equal to the force of gravity

$$F_y = F\cos\alpha = mg.$$

The horizontal component $\boldsymbol{F}_x$ of the aerodynamic force $\boldsymbol{F}$ is perpendicular to the velocity of the aircraft and results the aircraft to turn.

$$F_x = F\sin\alpha = \frac{mv^2}{R}.$$

Dividing the first equation by the second we obtain

$$\frac{F_x}{F_y} = \tan\alpha = \frac{v^2}{gR}.$$

The radius of the circle trajectory

$$R = \frac{v^2}{g\tan\alpha}.$$

We can calculate the value of $\tan\alpha$ by measuring the two components of the aerodynamic force. The ratio of these components will give the value of $\tan\alpha$

$$\tan\alpha = \frac{F_x}{F_y} \approx \frac{2}{3}.$$

The radius of the turn's circle will be approximately 1.7 kilometers.

Note: This activity can improve certain skills of the students such as analysing and interpreting a picture. If they can measure the needed information the task becomes very easy.

4.4 Balance of a chain

Problem: One end of the thin chain is fixed to the wall; the other end is pulled horizontally with a force of 0.1 N. Fig. 5 shows the motionless chain in front of a square paper. Calculate the weight of the chain with the help of the picture.

Solution: As we can see in the figure the chain's shape shows a characteristic curve.

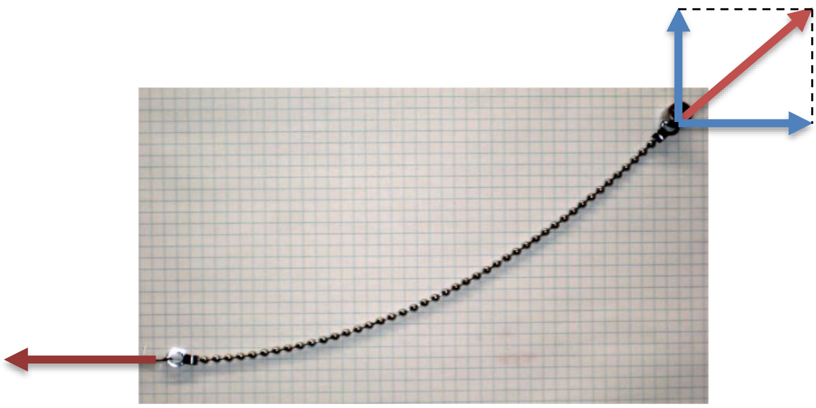


***Fig. 4**: Forces acting on the chain.*

At the fixed end, the curve is steep, but as we move to the other side, the curve becomes less and less steep. The chain is at rest that means that the vector sum of the forces on the body must be zero. The three forces acting on the chain are the following: the two forces acting at the ends of the chain, and the gravitation. The background behind the chain can help students recognize that the fixed end of the chain is at a 45° angle, which is also the direction of the force acting on the fixed end of the chain. The direction of the gravitation acting on the chain links is vertical and the force acting on the end of the chain with the thread is horizontal, so, we can say that in a rest position the vertical component of the force acting on the fixed end of the chain is the same as the gravitation acting on the chain. (The magnitude is the same, but the direction is the opposite.) The magnitude of the horizontal component of the force acting on the fixed end of the chain is the same as the magnitude of the force acting on the other end of the chain, but its direction is also the opposite. The vertical and horizontal components of the force acting on the fixed end are of the same magnitude which is 0.1 N. Hence, the weight of the chain is 0.1 N.

4.5 Coins

Problem: Put two different coins next to a magnifying glass, the bigger coin should be closer to the magnifying glass. In the first photo we can see the virtual image of the bigger coin and we cannot see the smaller one. By shifting the smaller coin further away from the lens, its virtual image will appear.

Fig 6: *Only the virtual image of the bigger coin is visible.*

Fig. 7: *The virtual image of the smaller coin appears.*

The task here was to give an explanation to this phenomenon. In their explanation the students had to draw their solutions, and the older contestants also had to calculate the criteria of the appearance of the second image.

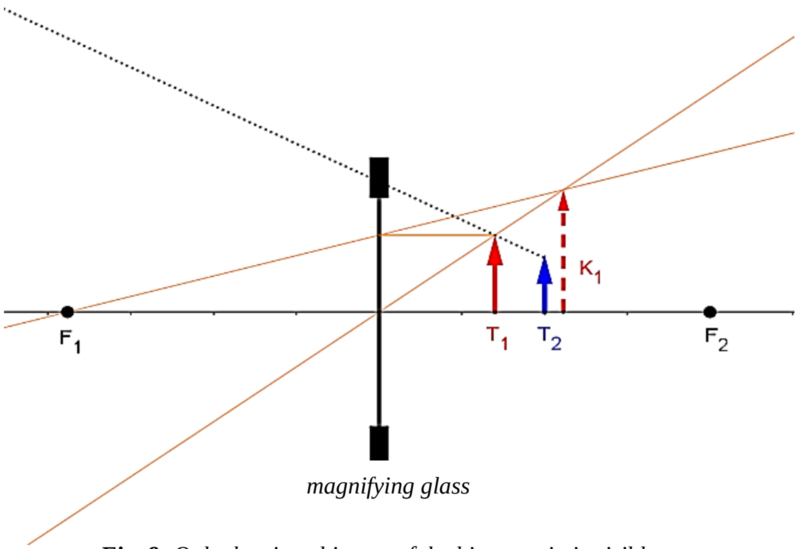


Fig. 8: *Only the virtual image of the bigger coin is visible.*

Solution: Since both photos show an enlarged version of the coins, this means that the coins are behind each other, within the focal length. This is true in both cases; in the first case only the virtual image of the larger coin is shown, in the second case the virtual image of the smaller coin is also displayed. We cannot see the smaller coin in the first case because the rays (blue line in Fig. 8) coming from the object T_2 (smaller coin) do not reach the lens because of the object T_1 (larger coin).

Fig. 7 gives information about a small change, how we slowly pulled further the smaller coin from the lens. The black dashed line connecting the end of the arrows of the objects T_1 and T_2 reaches the lens hence the virtual image K_2 appears. (We use the well-known radius to draw the image K_2. These radiuses do not have to take part in the process of constructing the image.)

We need that one part of the rays from the second object must go through the lens in order of the appearance of magnified image of the two coins behind each other. We can explain this phenomenon with a mathematical inequality using the marking system of Fig. 10

$$\frac{\frac{D}{2} - T_2}{t_2} \geq \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1}.$$

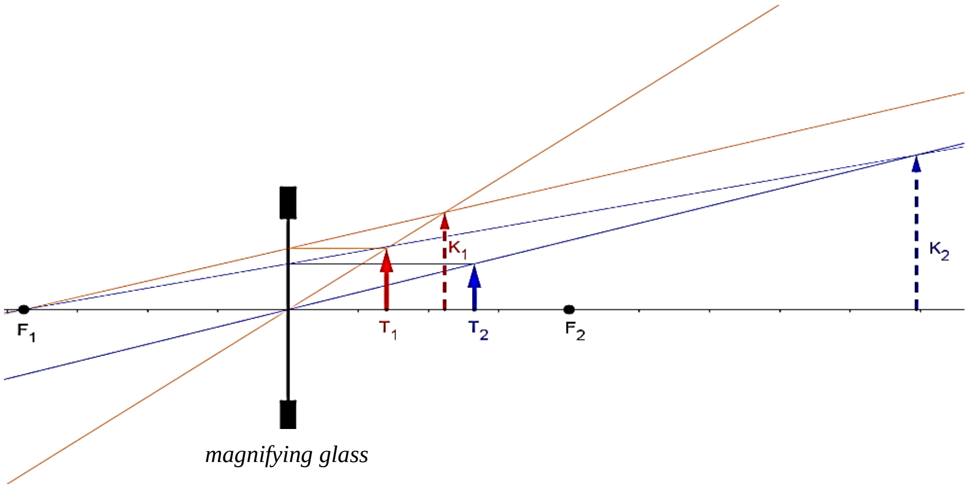


Fig. 9: *Both virtual images are visible.*

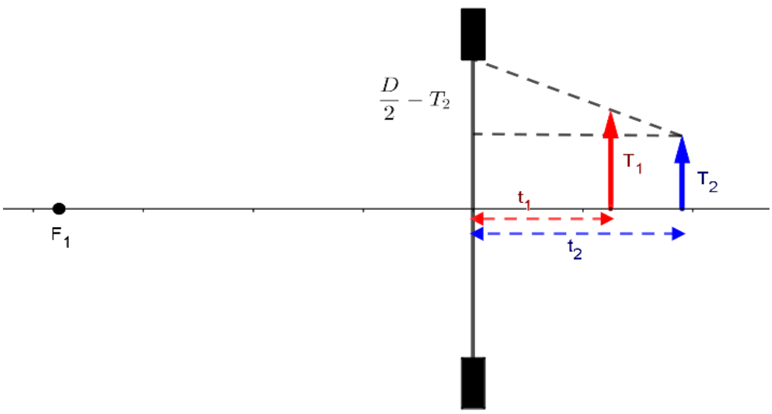


Fig. 10: *Explanation of the size-effect of the lens.*

Notes: The activity is based on a simple examination of the magnifying glass and this task is just based on the knowledge of 8th grade students. However, to solve this problem, children need to understand the whole situation and take into account factors (e.g., lens size that provide extra criteria) that can usually be neglected in an average physics class.

5. Experiments

Students of the first two categories are given the opportunity to bring and present experiments chosen by their interest. This part of the competition is open for the public and prizes are awarded by public vote. Recent years have shown that this is the longest and most popular part of the competition because of the interesting and creative experiments brought by students.

Students between the ages of 13-16 prepare experiments chosen by their interest. Their task was to present, explain and answer the questions by the judges connected to their experiment. The groups put their experiment together at the scene of the competition and they give a real physics show to the judges, to their peers, to the teachers and to everyone else who is interested. Our experiences of the decades show that this part of the competition plays a huge role of the motivation of the students. (The good atmosphere, the interesting presentations and the community keeps the students to come back the next year.) The photos of this part of the competition are proof how much the students enjoy experiments.

This is not just the most enjoyable part of the competition but also a place where the students learn a lot from each other by presenting their experiments. For pre-teachers it also gives an opportunity to collect new ideas for their physics class.

6. Quiz

The oldest age group compete in a public quiz show where the schools are represented by a pair of students. The quiz contains a wide variety of activities connected to videos, computer programs and experiments presented at the scene of the quiz. The points given by the judges are based on the professionalism of the groups. The awards are given to the first three groups with the highest scores.

7. The role of pre-teachers in the competition

In the last two decades, university students of ELTE (Eötvös Loránd University) who take part in the teacher training program could volunteer to help organize the competition. They have assisted in the preparation of the competition, have taken part in correcting the tests and they have also presented different experiments in the last two rounds.

Fig. 11: *Some picture of the show.*

Fig. 12: *More picture of the show.*

The teachers, pre-teachers and the judges share their experiences about the competition. (All the mini-research papers are public so everyone who is interested is allowed to read them.) They discuss the correction of problem-solving activities. The teachers are suggested by the judges to have a discourse with their students after the competition. They are also encouraged to highlight their students' best works and to inspire the children to continue their participation in the field of physics.

Pre-teachers are given the opportunity to gain experience and get some help when they start working in schools. They can practise correcting tests, evaluation; they connect with other physics teachers and can join the community of physics teachers. Moreover, they can work with talented and enthusiastic students and can practise preforming in front of students.

8. Conclusion

In this article we introduced a complex competition in Hungary. This competition, which has been running for almost three decades, is popular among students and professional teachers, and its success is proved by the fact that many of the participants in the former competitions graduated from engineering and science or became physics teachers. For future teachers, participation in the organization of the competition and in the pilot-demonstrations provides a good opportunity to prepare for teaching and gain experience in practical pedagogical work. Simplified versions of the tasks of the competitions can enrich high school teaching.

References

[1] Dziob D, Górska U, Kołodziej T and Čepič M 2020 *Physics competition to inspire learning and improve soft skills: a case of the Chain Experiment Int J Technol Des Educ* https://doi.org/10.1007/s10798-020-09620-y
[2] Martin Plesch, Samuel Plesník and Natália Ružičková 2020 *The IYPT and the 'Ring Oiler' problem* Eur. J. Phys. 41 034001 (12pp) /doi.org/10.1088/1361-6404/ab6414
[3] Tasnádi P, Bérces Gy, Főzy I, Juhász A and Kovács I 1989 *Experimental problems for Physics competitions*, In: K, Luchner; H, Deger; R, Dengler; R, Worg: International Conference on Teaching Modern Physics - Condensed Matter, London, United Kingdom: World Scientific, pp. 423-424.
[4] Tasnádi P, Rajkovits Zs, Juhász A 1999 *Hands on experiments in problem solving*, In: G, Born; H, Harreis; H, Litschke; N, Treitz: The International Conference on Hands-on Experiments in Physics Eucation, Duisburg, Deutschland: Universität Duisburg, pp. 466-472.
[5] Juhász, A and Tasnádi P 2000 *Károly Ireneusz Physics Competition for Hungarian Catholic Schools*, Physics Competitions, Journal of the world federation of physics competition 2 pp. 44-45.
[6] H Jordens and L Mathelitsch Physics competitions 2009 Eur. J. Phys.**30** S101
[7] The International Young Physicists' Tournament (IYPT), Official IYPT Website, https://www.iypt.org/

Authors' addresses: Szádeczky-Kardoss Magdolna (Träger Magdolna), Loránd Eötvös University, Physics Education Research Group, 1111, Budapest, Lágymányosi utca 12, Hungary,
e-mail: t.magdi28@gmail.com
Juhász András, Loránd Eötvös University, Department of Materials Physics, 1112, Budapest, Felsőhatár út 18, Hungary
e-mail: juhyand@gmail.com
Tasnádi Péter, Loránd Eötvös University, Department of Meteorology,
e-mail: tasi@ludens.elte.hu

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2021 (50)

VZDELÁVANIE VO FYZIKE

Niekoľko subjektívnych postrehov z dištančného vyučovania fyziky

Gábor Tóth

Abstract: The article summarizes several practical experiences from teaching physics at a secondary grammar school during the period of distance education. The tools and methods presented here may also be applicable during off-line teaching. At the end of the article there is an example of such use: a short guide to creating individual digital textbooks.

Keywords: distance education, digital textbook, digital tools

Súhrn: V článku je zhrnutých niekoľko praktických skúseností z vyučovania fyziky na jednom gymnáziu počas obdobia dištančného vzdelávania. Tu predstavené prostriedky a metódy môžu byť použiteľné aj počas off-line vyučovania. Na konci článku je príklad takéhoto využitia: krátky návod k tvorbe individuálnych digitálnych učebníc.

Kľúčové slová: dištančné vyučovanie, digitálna učebnica, digitálne prostriedky

MESC: M50

1. Úvod

Jednou z najčastejšie opakovaných fráz o online vyučovaní je, že lockdown prišiel nečakane a zastihol komunitu pedagógov viac-menej nepripravenú. Učitelia sa museli prispôsobiť novým výzvam prakticky za niekoľko dní. Po viac ako ročnej skúsenosti sa však začínajú hromadiť ponaučenia z tohto obdobia. Ďalšou často opakovanou frázou je, že škola (vyučovanie, výchovno-vzdelávací proces… nech si každý vyberie termín, ktorý je mu sympatický) *chce žiť* a *potrebuje živé kontakty*. Dištančné vzdelávanie počas lockdownu bolo nutné zlo a nedokonalá náhrada „ozajstného" vyučovania. Autor článku s týmito tvrdeniami v zásade aj súhlasí, s tou poznámkou, že online školský život nepriniesol *iba* negatívne skúsenosti a *iba* zlé zážitky. V tomto článku sa pokúsime sústrediť na tie aspekty online vyučovania, ktoré sa zdali byť užitočnými, a môžu byť preto zaujímavé v budúcnosti, jednak pre „klasické off-line" vyučovanie, jednak pre prípadné ďalšie online obdobia.

Musíme podčiarknuť, že všetky nižšie uvedené tvrdenia sú iba subjektívne názory autora. Klasický pedagogický experiment o nižšie predstavených prostriedkoch a metódach neprebiehal.

2. Východisková situácia

Po vyhlásení lockdownov, v roku 2020, sa každá škola ocitla v špeciálnej situácii. Nebolo by korektné, keby sme chceli nasilu porovnávať elitné gymnázium v srdci veľkomesta so základnou školou na dedine, kde mohlo sťažiť situáciu sociálne, materiálne a infraštruktúrne zázemie detí, ale aj škôl. Uvedieme preto, že nasledujúce skúsenosti boli získané na gymnaziálnej úrovni Cirkevnej spojenej školy Marianum v Komárne. Niekoľko základných, ale dôležitých charakteristík o škole:

1) Naše gymnaziálne triedy sú relatívne malé. Počet žiakov v jednotlivých triedach je 13 až 21.
2) Vyučovací jazyk školy je maďarský (preto aj ilustrácie článku budú v tomto jazyku, so slovenským popisom dôležitejších častí).
3) Každý žiak má doma prístup na Internet, a ovláda prácu s počítačom. Nakoľko máme relatívne veľa žiakov z okolitých dedín, resp. menších miest, kde nie je štandardom pripojenie na Internet optikou, naším najväčším problémom bola nie rovnaká kvalita prenosu signálu počas online hodín. Málokedy sme preto vyžadovali od žiakov používanie kamier.[1]
4) Škola sa dohodla už na jar 2020, že na evidovanie učiva a hodnotenie žiakov bude jednotne používať platformu Google Classroom. Na jeseň 2020 sa dohodlo aj na tom, že pre potreby videohodín sa bude používať predovšetkým systém BigBlueButton. Počas druhého lockdownu (teda od jesene 2020) sme sa rozhodli aj pre zachovanie rozvrhu hodín. Na málo výnimiek sme teda realizovali 45 minútové živé online hodiny.
5) Počas prvého lockdownu sme museli veľa improvizovať. Článok preto reflektuje skôr na skúsenosti z druhého lockdownu, od jesene 2020.

2.1 Prvé ponaučenia

Po prvom lockdowne autor článku zmapoval názory žiakov o skúsenostiach z online vyučovania. Na základe týchto, ale aj subjektívnych názorov formuloval niekoľko aspektov, ktoré ovplyvnili výber prostriedkov počas druhého lockdownu:

1) Žiaci sú vďační za výklad učiteľa. Kladne hodnotili použitie digitálnej tabule, zdieľanie obrazovky, nahrávanie online hodín a ich neverejné sprístupnenie na Youtube.
2) Žiaci sú vďační za digitálne študijné materiály: texty, zbierky príkladov, screenshoty z digitálnej tabule atď.
3) Skupinová a/alebo samostatná práca žiakov zvýšuje ich motiváciu.

---

[1] Ako už bolo spomenuté, každá škola zápasila s inými výzvami. Vieme si predstaviť školu, kde každý žiak disponoval kvalitným širokopásmovým pripojením. V týchto školách asi nebol problém s realizáciou real-time online videohodín. Takisto sme všetci počuli o školách, na ktorých veľké percento detí je z marginalizovaných rodín, a učivo bolo roznášané pre nich v papierovej podobe.

4) Jednou z najťažších úloh pedagóga je trvalo udržať motiváciu žiakov k práci. Neuveriteľne veľa faktorov tlačí deti k tomu, aby to vzdali, a prestali sa učiť (len niekoľko príkladov: nejasný koniec ťažkého obdobia, minimálny kontakt s rovesníkmi, často ťažká situácia v rodine – choroba, výpadok príjmu, starostlivosť o menších súrodencoch, monotónnosť dní atď.). Treba preto využiť každú možnosť na aktivizáciu žiakov, a namiesto frontálneho výkladu zapojiť do priebehu hodiny samotných žiakov, a to čo najviac.
5) Preberanie naplánovaného učiva je oveľa pomalšie online formou. Ak trochu preženieme: (a) pedagóg sa buď snaží držať sa plánu, a to, čo „odučí", urobí povrchnejšie, alebo (b) vybrané tematické celky sa snaží prebrať „poriadne", ale obetuje niekoľko tém. (Ani fyzika, ani matematika nie sú povinné maturitné predmety, preto sa autor rozhodol pre druhú možnosť.)
6) Počas precvičovania preberaného učiva riešením úloh sa na našich hodinách veľmi zriedkavo riešia príklady pri tabuli. Žiaci zvyčajne pracujú na vytýčených úlohách samostatne vlastným tempom, a pedagóg prebieha medzi nimi, a kontroluje/overuje/opravuje/reflektuje ich riešenia. Nakoľko (u nás) v jednej triede nie je príliš veľa žiakov, dá sa to stihnúť – tento postup sa úspešne implementovalo aj do online formy vyučovania (pozri nižšie). Žiaci sú takýmto spôsobom viac tlačení k samostatnej aktivite, než keby pasívne opisovali, čo vidia na tabuli. Tento spôsob interakcie dá širšiu možnosť na diferenciáciu žiakov (šikovnejší zvyčajne vyriešia povinné úlohy skôr, a môžu sa zaoberať náročnejšími, ale nepovinnými problémami).

3. Online prostriedky a metodické postupy inšpirované nimi

3.1 Portál na ukladanie učiva

Používali sme systém Google-u: Classroom, Dokumenty, Tabuľkový editor, Formuláre, Drive atď. Všetky nasledujúce príklady sú Google-ovské dokumenty alebo tabuľky.[2]

Cez Classroom sme vytvorili kurz pre každý predmet, v každom ročníku samostatne. Na tento povrch sa potom pridávali ďalšie študijné materiály. Časť kurzu mohol vyzerať napr. tak, ako ukazuje obr. 1.

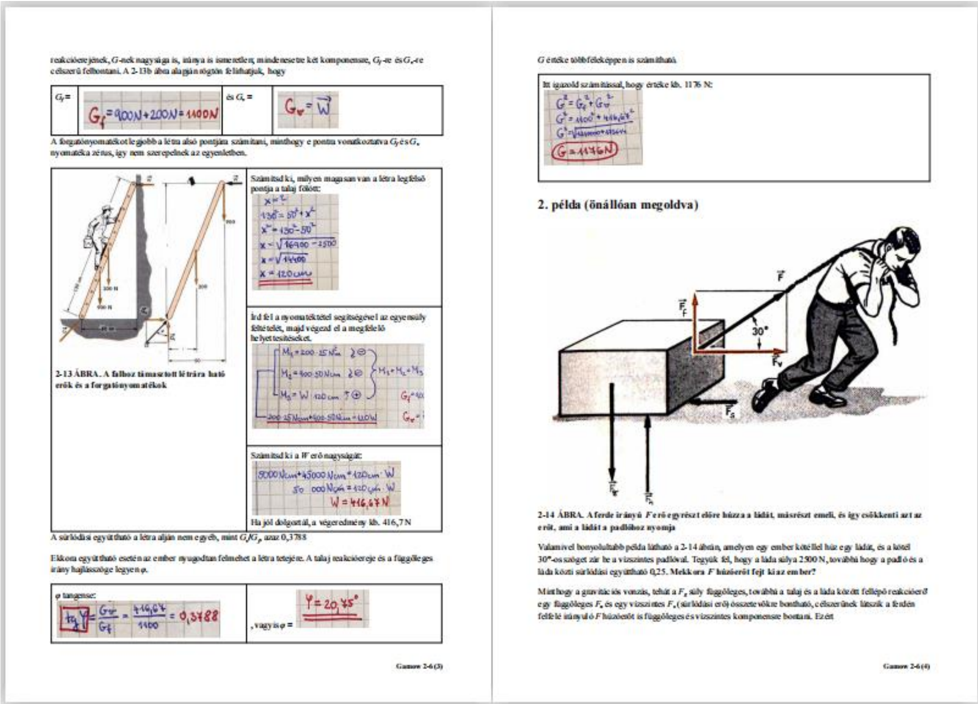
[2] Cieľom tohto článku nie je robiť reklamu pre tento systém. Hovoríme o ňom naozaj iba z toho dôvodu, že sme s ním každodenne pracovali počas online obdobia. Na trhu je veľa podobných balíkov, ktoré ponúkajú podobne spektrum možností, ako systém od spoločnosti Google. Mnohé školy používali napr. MS Teams, ale aj známy Edupage je porovnateľný vo funkcionalite.

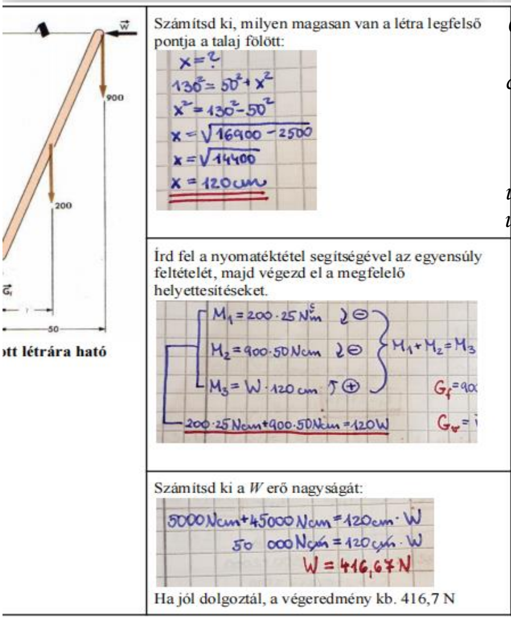
Obr. 1: *Vľavo hore je názov kurzu (FIZ). V tomto príklade sa jedná o kurz fyziky pre 1. ročník. Vľavo sú názvy jednotlivých tematických celkov (zhora nadol: „2 Telesá v pokoji", „1 Naše miesto vo vesmíre". „0 Úvod", „Písomky", „Pomocné programy", „Organizačné pokyny"). V hlavnej časti sa ponúkali učebné materiály rozdelené do tém. Napr. „2-7 Tlak kvapalín", „2-6 Trenie", „2-5 Ľubovoľne orientované sily (Príklady)", „2-5B Ľubovoľne orientované sily #2" atď. Kliknutím na názov témy sa daná téma „rozbalí", a žiak má prístup k materiálom.*

3.2 Digitálne knihy

Na hodinách fyziky sme veľmi často používali vybrané texty z maďarského prekladu učebnice *Physics: Foundations and Frontiers* od dvojice autorov George Gamow a John M. Cleveland. Dôvodom bolo najmä to, že text často vysvetľuje fyzikálne javy cez riešenia konkrétnych problémov. Napr., v časti o momentovej vete je viac numerických riešení problémov o rovnovážnych polohách rôznych telies. Tieto časti boli z knihy naskenované, digitalizované OCR aplikáciou, a prepracované do tzv. *projektov*. Žiaci v projektovom materiáli nenašli hotové riešenia problémov, ale návody, ktoré ich postupne, z kroku na krok, viedli k tomu istému riešeniu, ako učebnica. Tieto projekty riešili samostatne do zošitov, a jednotlivé fázy riešení si odfotili, a vložili do svojich vlastných dokumentov.[3] Počas samostatnej práce bol učiteľ vždy k dispozícii online, a pomáhal tým žiakom, ktorí to potrebovali.

[3] Inšpiráciu k forme takýchto projektom sme čerpali z učebníc dvojice Edwin F. Taylor a John Archibald Wheeler: *Spacetime Physics* a tiež *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*. V týchto knihách sú celé časti spracované „projektovo". Striedajú sa tam krátke, niekoľkoriadkové výklady s jednoduchými úlohami. Výsledky každej úlohy sú potom použité v nasledujúcich úlohách. Vznikajú tak reťazce krátkych textov a úloh, a na konci čitateľ zistí, že sa mu podarilo – síce výdatnou pomocou autorov – ale aj tak samostatne – odvodiť napr. vzťahy pre rýchlosť objektu padajúceho do čiernej diery z pohľadu rôznych pozorovateľov.





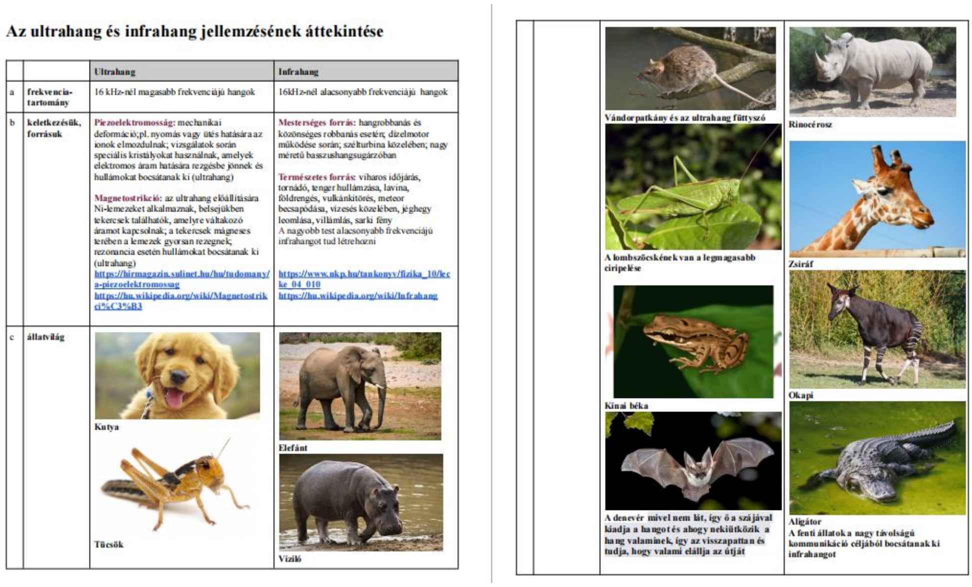
Obr. 2: *Príklad dvojstrany z digitálnej učebnice jednej žiačky, a (vľavo dole) detail projektovej časti. Pred prácou tabuľka je prázdna, obsahuje iba inštrukcie. Každý žiak pracuje samostatne, a do tabuľky postupne nahráva fotky zo svojho zošita. Vpravo vidieť zväčšenie časti projektu ukazujúce reťazca krátkych úloh. [Preklad troch úloh na pravej strane: „Vypočítaj, ako vysoko je najvyšší bod rebríka nad podlahou!", „Napíš podmienku rovnováhy pomocou momentovej vety, a vykonaj patričné dosadenia!", „Vypočítaj veľkosť sily W. Ak si dobre počítal, výsledok je približne 416,7 N."]*

Google dokumenty, tabuľky

3.3 Google dokumenty, tabuľky

Výhodou systému Google je, že jednotlivé materiály (dokumenty, tabuľky, videá, kresby atď.) sú navzájom ľahko prepojiteľné, a je možné ich zdieľať viacerými spôsobmi:

1) **Žiaci môžu súbor zobraziť.** V tomto prípade žiaci nevedia zasahovať do obsahu. Dostanú to, čo im pripravil učiteľ. Takto zdieľaný dokument sa príliš nelíši napr. od bežného PDF dokumentu.
2) **Žiaci môžu súbor upraviť.** V tomto prípade každý žiak triedy (alebo vybranej skupiny) vie modifikovať obsah (alebo časť obsahu) toho istého súboru. Hneď uveďme aj niekoľko príkladov na využitie takéhoto zdieľania!
   i) **Práca v skupinách.** Učiteľ vopred pripravil bianko dokument napr. s prázdnou tabuľkou (iba jej hlavička bola vyplnená), a žiaci v malých skupinách museli vyplniť jednotlivé bunky tabuľky. Takýmto spôsobom sme spracovali napr. vlastnosti ultrazvuku a infrazvuku.



Az ultrahang és infrahang jellemzésének áttekintése

		Ultrahang	Infrahang
a	**frekvencia-tartomány**	16 kHz-nél magasabb frekvenciájú hangok	16kHz-nél alacsonyabb frekvenciájú hangok
b	**keletkezésük, forrásuk**	**Piezoelektromosság:** mechanikai deformáció;pl. nyomás vagy ütés hatására az ionok elmozdulnak; vizsgálatok során speciális kristályokat használnak, amelyek elektromos áram hatására rezgésbe jönnek és hullámokat bocsátanak ki (ultrahang) **Magnetostrikció:** az ultrahang előállítására Ni-lemezeket alkalmaznak, belsejükben tekercsek találhatók, amelyre váltakozó áramot kapcsolnak; a tekercsek mágneses terében a lemezek gyorsan rezegnek; rezonancia esetén hullámokat bocsátanak ki (ultrahang) https://hirmagazin.sulinet.hu/hu/tudomany/a-piezoelektromossag https://hu.wikipedia.org/wiki/Magnetostrikci%C3%B3	**Mesterséges forrás:** hangrobbanás és közönséges robbanás esetén; dízelmotor működése során; szélturbina közelében; nagy méretű basszushangsugárzóban **Természetes forrás:** viharos időjárás, tornádó, tenger hullámzása, lavina, földrengés, vulkánkitörés, meteor becsapódása, vízesés közelében, jéghegy leomlása, villámlás, sarki fény A nagyobb test alacsonyabb frekvenciájú infrahangot tud létrehozni https://www.nkp.hu/tankonyv/fizika_10/lecke_04_010 https://hu.wikipedia.org/wiki/Infrahang
c	**állatvilág**	Kutya Tücsök Vándorpatkány és az ultrahang füttyszó A lombszöcskének van a legmagasabb ciripelése Kínai béka A denevér mivel nem lát, így ő a szájával kiadja a hangot és ahogy nekiütközik a hang valaminek, így az visszapattan és tudja, hogy valami elállja az útját	Elefánt Víziló Rinocérosz Zsiráf Okapi Aligátor A fenti állatok a nagy távolságú kommunikáció céljából bocsátanak ki infrahangot

__Obr. 3:__ Ukážka zo zdieľaného dokumentu, v ktorom žiaci spracovali vlastnosti ultrazvuku a infrazvuku. [Nadpis: „Prehľad charakteristiky ultrazvuku a infrazvuku", hlavička: „ultrazvuk", „infrazvuk", riadky: „1 Interval frekvencie", „2 Vznik, zdroje", „3 Živočíchy".]

   ii) **Evidovanie vyriešených úloh.** Učiteľ pripravil prázdnu tabuľku, v ktorej figurovali mená žiakov, čísla vytýčených úloh, a bolo nastavené automatické formátovanie farby buniek. Trieda mala prístup k tej istej tabuľke. Vždy, keď žiak vyriešil jednu úlohu, zapísal si do danej bunky číslicu 1.

Takýmto spôsobom bolo evidované, že kto a akým tempom spočítal jednotlivé príklady resp. riešil laboratórne cvičenie.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Laborgyakorlat mi van már meg?														
2															
3		Kérdőív	%-os eltérés a hivatalos értéktől	11	inga elkészítve, és működik	inga hossza lemérve	20 lengés lemérve 5x	periódusidő kiszámítás a 5x	g kiszámítás a 5x	g átlaga	g értékének eltérései az átlagtól 5x	absz. hiba	rel hiba	eredmény összevetése a táblázati adatokkal	megvitatás
4	[redacted]			0											
5	[redacted]			7	1	1	1	1	1	1	1				
6	[redacted]	1	2,67346	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	[redacted]	1	1,9755	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	[redacted]	1	1,8965	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	[redacted]	1	0,606	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	[redacted]			0											
11	[redacted]		7,46	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	[redacted]	1	1,458	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	[redacted]	1	9,4	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	[redacted]	1	2,17	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	[redacted]	1	1,7011	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	[redacted]	1	0,1596	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	[redacted]	1	1,483	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	[redacted]	1	2,2	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19	[redacted]			10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
20	[redacted]			0											
21	[redacted]		7,03	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22	[redacted]	1	7,21	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23	[redacted]	1	7,21	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
24	[redacted]	1	1,862	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Obr. 4: *Ukážka evidencie úloh v zdieľanej tabuľke. (V ukážke sú mená žiakov skryté.) Úlohou žiakov bolo určiť gravitačné zrýchlenie pomocou matematického kyvadla. [Názov tabuľky: „Laboratórne cvičenie – čo všetko je hotové?" Nadpisy hlavičky: „Formulár", „Percentuálna odchýlka od oficiálnej hodnoty", „11" (toto číslo ukazuje, že koľko čiastkových úloh majú žiaci vyriešiť), „Kyvadlo je pripravené a funguje", „Dĺžka kyvadla zmeraná", „20 kmitov zmeraných 5-krát", „Perióda vypočítaná 5-krát", „g vypočítané 5-krát", „Priemer g", „Absolútna chyba", „Relatívna chyba", „Výsledok porovnaný s tabuľkovou hodnotu", „Diskusia."]*
Jednotky v tabuľke neznamenajú to, že žiaci boli učiteľom ohodnotení touto známkou. (Po odovzdaní protokolov samozrejme učiteľ musel ohodnotiť každý protokol, tak ako zvyčajne.) Žiaci svojimi jednotkami iba dávali rýchlu spätnú väzbu učiteľovi aj ostatným, ako napredujú s riešením laboratórneho cvičenia a so spracovaním údajov. Tabuľka automaticky spočítala jednotky, a zafarbila príslušné bunky od červenej cez žltú po zelenú. Automatickým farbením boli vyhodnotené aj relatívne odchýlky od oficiálnej hodnoty: modrá farba ≤ 15%-ná chyba, červená farba > 15%-ná chyba. Z tabuľky je jednoznačné, že väčšina triedy stíhala dokončiť laboratórnu prácu (traja sa nezúčastnili aktivity), a navyše, že obdržali prekvapivo slušné relatívne chyby: (0,16-9,4)%-né odchýlky sú na domáce pomery veľmi pekné. Podobnými tabuľkami sme evidovali aj riešenie úloh k jednotlivým témam.

iii) V učebnom texte sa mohli žiaci stretnúť s nápadmi na realizáciu experimentov. Keď niekto dobrovoľne zrealizoval domáci experiment (samozrejme za motivujúcu "malú" jednotku), mohol vložiť fotku svojho experimentu priamo do textu.

Ha a legalsó könyvet úgy tesszük le, hogy hosszának csaknem a fele kiálljon. a második és valamennyi következő könyvet már nem tudjuk jobban kitolva elhelyezni, mert leesik, s így egyetlen további könyvvel sem jutunk kijjebb, mint a legelsővel. De kezdjük az elrendezést fordítva, és képzeljük hogy amelyik könyv legalul volt, az kerül legfelülre.Mindegyik könyvtől azt várjuk, hogy ne essék le az alatta levő könyvoszlopról, ezért a könyvet úgy kell elhelyezni, hogy valamivel kevésbé álljon ki, mint hosszának a fele.

2-6 ÁBRA. Az asztallap szélén túlnyúló könyvoszlop felépítése. Az (1+2) pont a két felső könyv közös súlypontja; az (1 +2+3) pont a három felső könyy közös súlypontja: ez az (1+2) kettős súlypont és a (3) egyes súlypont közötti távolság egyharmadára esik

A 2-6 ábrára tekintve látható, hogy az első és a második könyv közös súlypontja a második könyv szélétől jobbra, egynegyed könyv távolságra esik. Ezért, ha az első két könyvet úgy helyezzük a harmadikra, hogy a másodiknak egynegyede (illetve ennél egy kicsivel kevesebb) álljon ki, akkor a könyvek nem fognak

Könyvtárra lenne szükségünk, ha három vagy négy könyvhosszúságnyira akarnánk a legfelső könyvvel eljutni.

Szabadon választható házi feladat

Végezd el a fenti kísérletet otthon, 5-6 (megközelítőleg) egyforma könyvvel, és igazold, hogy a legfelső könyv pereme távolabbra került az asztal szélétől, mint a saját hossza. A kísérlet eredményéről készíts selfiet, és töltsd fel a Classroomba. (A feladat nem kötelező, viszont jutalom egyes jár érte.)

Néhány megoldás

Nelli:

Franciska:

Feladatok

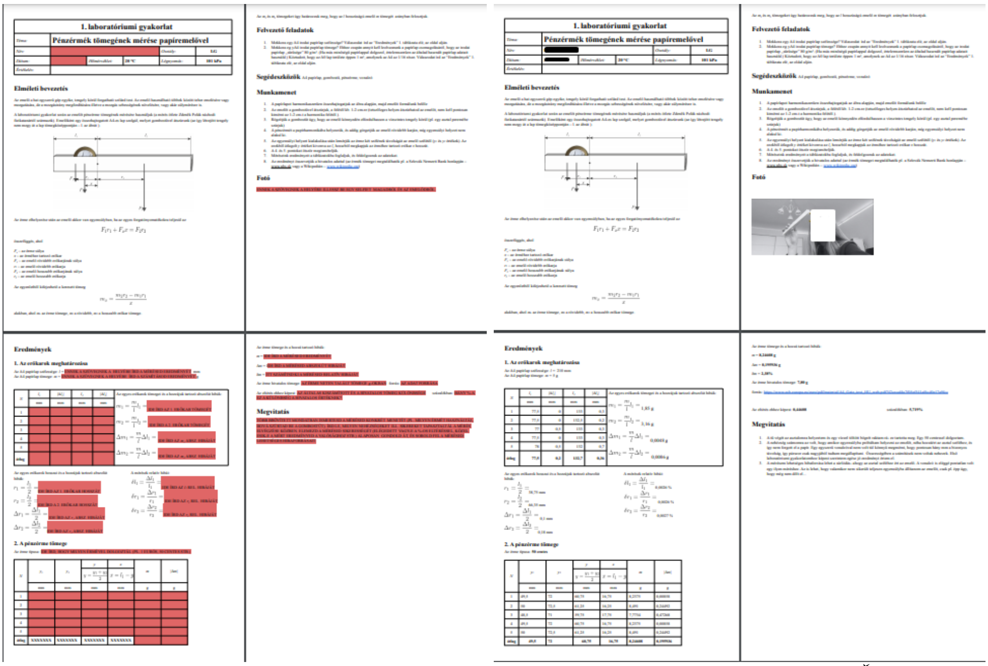
7. Egy elvékonyodó rúd 6 m hosszú, súlya pedig 240 N, egyensúlyban akkor van, ha egyik végétől 2 m-nyire függesztették föl. Két ember (a két végén fogva) megemeli a rudat. Mekkora erőt kell az egyes embereknek kifejteniük?

Obr. 5: *Ďalšia ukážka na zasahovanie do digitálneho učebného textu žiakmi. Na ľavej strane je opísaný zaujímavý experiment na hlbšie pochopenie ťažiska systému viacerých telies. V ďalšom pokračovaní textu bolo vyhradené miesto, kde žiaci si mohli nahrať vlastné fotografie nimi realizovaných experimentov. Žiaci tak mohli ilustrovať vlastnú učebnicu vlastnými fotografiami. Táto úloha bola evidovaná ako dobrovoľná domáca úloha.*

3) **Vytvoriť kópiu pre každého študenta.** Z vopred pripraveného bianko dokumentu každý žiak dostal jeden vlastný exemplár, a mohol pracovať s týmto materiálom. Túto funkciu sme využili týmito spôsobmi (v snahe maximalizovať pútavosť práce):
   i) Personifikované digitálne učebné texty. O tomto využití sme písali vyššie.
   ii) Protokoly laboratórnych cvičení. Na našej škole, aj pred online vyučovaním, žiaci spracúvali výsledky laboratórnych cvičení samostatne, do vopred vytlačených prázdnych bianko protokolov.[4] Počas lockdownu tieto materiály bolo potrebné iba veľmi jemne upraviť, a zverejniť ako Google-ovský dokument.

Musíme vyzdvihnúť, že – až na na málo výnimiek – všetky hore uvedené úlohy boli realizované počas dopoludňajších online vyučovacích hodín za online prítomnosti učiteľa. Na komunikáciu sme používali školou odporúčaný systém BigBlueButton nie tak často, namiesto toho sme prešli na *Discord*. Tento prechod nebol zakázaný. O dôvodoch a spôsoboch píšeme nižšie.

[4] Autor si veľmi dobre pamätá, že počas svojich štúdií rád meral a riešil laboratórne cvičenia, ale veľmi nerád spisoval ručne písané protokoly. Najnudnejšie bolo opisovanie teoretického úvodu a postupu práce z učebnice. Vopred pripravené bianko dokumenty všetky tieto časti obsahujú. Úlohou žiakov je už „iba" realizovať laboratórne meranie, spracovať vlastné namerané výsledky a napísať diskusiu.



Obr. 6: *Printscreeny štvorice strán vľavo ukazujú bianko protokoly laboratórnej práce. Žiaci mali za úlohu zmerať hmotnosť mince pomocou listu papiera, využitím momentovej vety. Bianko protokol obsahuje teoretické pozadie problému, zoznam pomôcok, postup práce a prázdne tabuľky. Miesta, kde deti mali samostatne pracovať boli vyznačené červenou farbou. Vpravo je printscreen žiakom vyplneného protokolu. Počas lockdownu, bolo súčasťou protokolu aj selfie žiaka a ním vyrobenej pomôcky: papierovej páky. (S týmto laboratórnym cvičením sa autor stretol na seminároch Heuréka, a idea experimentu pochádza (pravdepodobne) od učiteľa fyziky Zdenka Poláka. Zvyčajne je toto meranie vôbec prvé, ktoré počas štúdia žiaci v prvom ročníku u nás realizujú samostatne formou laboratórneho cvičenia. Toto cvičenie bolo vhodné na domácu prácu aj z toho dôvodu, že k realizácii žiaci skutočne nepotrebujú nič iné, ako hárok kancelárskeho papiera, ľubovoľnú mincu, pravítko a špendlík.).*

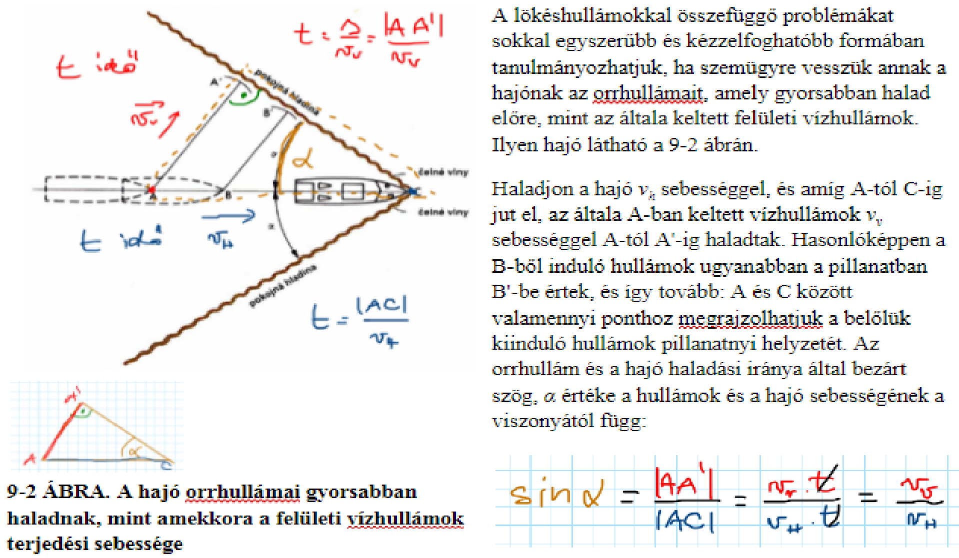
3.4 OpenBoard, LightShot, CodeCogs

K zachovaniu poznámok z učiteľovho výkladu boli najužitočnejšie tieto programy:

1) **Digitálna tabuľa a grafický tablet.** Nám sa osvedčil program OpenBoard, ale na webe je možné nájsť kvantum rôznych digitálnych tabúľ. Sú to vlastne jednoduché grafické programy, ktoré imitujú ozajstné tabule. Výhodou programu OpenBoard je, že jedným klikom je možné prepnúť medzi farebnými režimami: čierne pozadie sme použili na výklady, keď žiakom bolo príjemnejšie pozerať sa na tmavý monitor. Biele pozadie sme aktivovali pred vložením screenshotov do dokumentu (je úspornejšie, keď niekto sa rozhodne pre vytlačenie materiá-

lov). Grafický tablet sa stal počas online obdobia bežnou pomôckou mnohých pedagógov.

2) **LightShot.** Tento program je príkladom takých aplikácií, ktoré dokážu jednoduchým spôsobom spríjemniť život učiteľov aj žiakov, a ušetria užitočné sekundy počas online vyučovania. Zmení funkciu tlačidla počítača PrintScreen tak, že neukladá záber celého monitoru, ale iba z časti vyznačenej myšou. Tento strih je potom možné vkladať do rôznych programov (napr. dokumentov, digitálnej tabule, chatov, emailu) pomocou notoricky známych klávesových kombinácií Ctrl+C a Ctrl+V.



A lökéshullámokkal összefüggő problémákat sokkal egyszerübb és kézzelfoghatóbb formában tanulmányozhatjuk, ha szemügyre vesszük annak a hajónak az orrhullámait, amely gyorsabban halad elöre, mint az általa keltett felületi vízhullámok. Ilyen hajó látható a 9-2 ábrán.

Haladjon a hajó v_h sebességgel, és amíg A-tól C-ig jut el, az általa A-ban keltett vízhullámok v_v sebességgel A-tól A'-ig haladtak. Hasonlóképpen a B-ből induló hullámok ugyanabban a pillanatban B'-be értek, és így tovább: A és C között valamennyi ponthoz megrajzolhatjuk a belőlük kiinduló hullámok pillanatnyi helyzetét. Az orrhullám és a hajó haladási iránya által bezárt szög, α értéke a hullámok és a hajó sebességének a viszonyától függ:

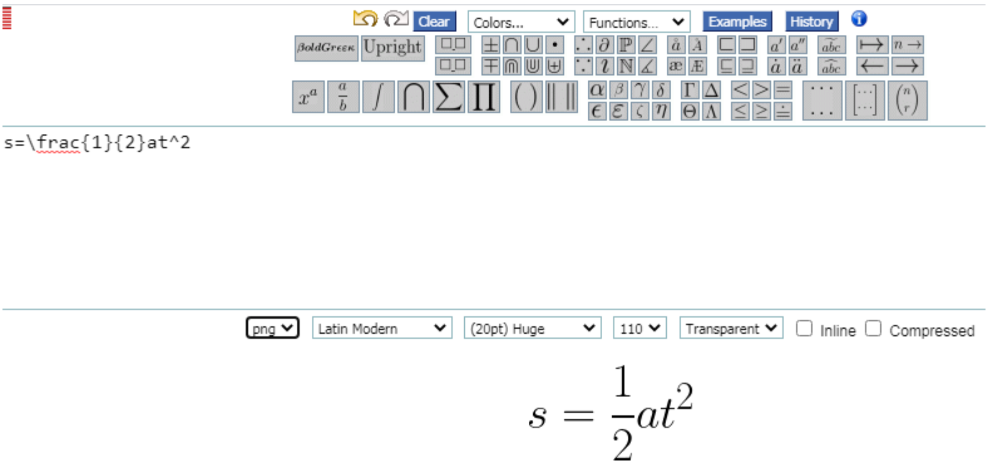
$$\sin\alpha = \frac{|AA'|}{|AC|} = \frac{v_v \cdot t}{v_H \cdot t} = \frac{v_v}{v_H}$$

9-2 ÁBRA. A hajó orrhullámai gyorsabban haladnak, mint amekkora a felületi vízhullámok terjedési sebessége

Obr. 7: *Žiaci kladne hodnotili, keď ilustrácie učebných textov boli vytvorené počas učiteľovho výkladu naživo, priamo pred ich očami. Napr. ilustrácia na obrázku vznikla tak, že pôvodný obrázok z vybranej učebnice sa nahral na digitálnu tabuľu, učiteľ doplnil niekoľko poznámok do pôvodného obrázku pomocou digitálneho pera, a následne vložil príslušný výrez z digitálnej tabule na miesto pôvodného obrázku v učebnici. Pomocou použitia funkcie LightShot proces prenosu obrázkov z jednej platformy na druhú je naozaj otázkou niekoľkých sekúnd. Ak sa výklad súčasne nahrával a zverejnil na Youtube, tak žiaci mali prístup aj k videozáznamu.*

3) **Rovnice CodeCogs.** Pri práci s online dokumentami môže robiť problém používanie rovníc. Editor Google Dokumentov nie je celkom kompatibilný s rôznymi offline textovými editormi. Taktiež nie každý žiak používa ten istý editor (dokonca už ani Microsoft Office nie štandardným balíkom používaným žiakmi). Na stránke CodeCogs je online editor LaTeX-ovských rovníc. Vytvorené rovnice sa dajú uložiť ako obrázky. Nie je možné ich neskoršie

modifikovať, ale sú kvalitne prevedené a zobrazujú sa rovnako, nezávisle od zvolenej platformy.



Obr. 8: *Online editor LaTeX-ovských rovníc na stránkach CodeCogs. Užívateľ napíše alebo myšou „nakliká" zdrojový kód rovnice do patričného okna, a hneď má k dispozícii výsledok, ktorý môže uložiť v rôznych formátoch. Výhodou tohto nástroja je, že editor preloží zdrojový kód súčasne s jeho písaním, čiže rovnicu vidíme hneď. Nevýhodou je, že rovnice sa ukladajú v bežných obrázkových formátoch (gif, png, pdf, eps atď.), čiže nie je možné ich dodatočné editovanie.*

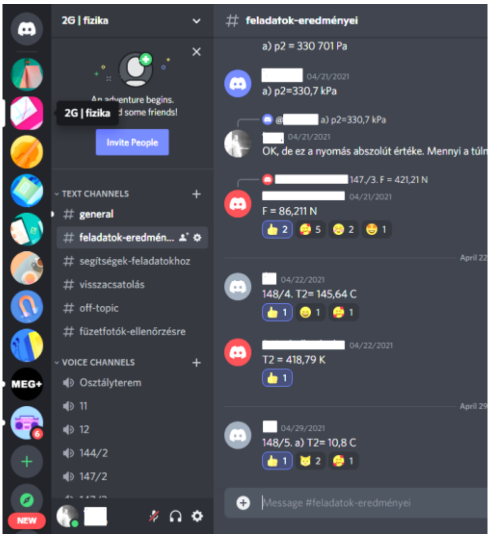
3.5 OBS Studio, YouTube

Obr. 9: n*a obrázku je screenshot z krátkeho domáceho videa s učiteľovým výkladom, v ktorom vysvetľuje pracovný postup vyššie spomenutého laboratórneho cvičenia s papierovou pákou..*

Žiaci veľmi pozitívne hodnotili aj to, keď výkladové časti hodiny boli nahrávané, a ako neverejné videá uložené na učiteľovom Youtube-ovom profile. V systéme Google Classroom bolo možné priložiť tieto videá k učivu. Žiaci tolerovali prípadnú nižšiu technickú kvalitu nahrávok, dokonca aj menšie prerieknutia, a veľmi kladne hodnotili, že tieto nahrávky sú určené prednostne im. Uviedli, že počas riešenia samostatných úloh bolo veľmi užitočné, že mali možnosť pozrieť sa ešte raz na danú problematiku. K nahrávaniu videí sme používali program OBS Studio. K arzenálu Googlovských aplikácií patrí aj Youtube, a zverejnenie týchto videí bolo naozaj nenáročné.

3.6 Discord

Jedným z najdôležitejších cieľov počas online vyučovania bolo udržať motiváciu žiakov k samostatnej práci. K tomuto cieľu bolo najľahšie sa priblížiť pomocou platformy Discord. Jedná sa o aplikáciu, ktorú je možné nainštalovať na počítač alebo mobil, a ktorá je populárna najmä medzi hráčmi videohier. Počas lockdownov začali učitelia využívať túto platformu celosvetovo na vyučovanie. My sme použili tento prostriedok najmä na tých hodinách, ktoré boli orientované na precvičovanie učiva cez riešenie príkladov a problémov. Simuluje pre žiaka aj učiteľa pobyt v triede.



Obr. 10: *V programe Discord je možné vytvoriť tzv. servery (predstavujú ich farebné kruhové ikonky na ľavom okraji obrázku). Do týchto serverov je možné pozvať iných užívateľov. Napr. učiteľ vytvorí server s názvom „Fyzika pre 2.G", a pozve sem svojich žiakov z tejto triedy. Na každom serveri je možné vytvoriť viac textových chatroomov (názvy začínajúce so symbolom #) a viac „izieb" pre videokonferencie (názvy začínajúce sa s ikonou reproduktora). Pre pedagogické účely sme vytvorili textové chatroomy napr. s názvami: #general, #riešenia-príkladov, #indície-k-príkladom, #spätná-väzba, #off-topic, #kontrola-fotiek-zo-zošitov atď. Izby videokonferencií boli pomenované (a pred každou hodinou aj premenované) podľa čísiel aktuálne riešených príkladov. Príklady týchto izieb sú vľavej časti obrázka. Keď sa žiaci zdržiavali v niektorej z videoizieb, tak pod názvom izby sa objavili ich užívateľské mená..*

Prechod medzi izbami je jednoduchý: stačí kliknúť na názov, a užívateľ už je vo vnútri. Každý, kto sa nachádza v tej istej videokonferenčnej izbe, môže komunikovať s ostatnými v tej istej izbe. Na hlavnej ploche (veľká pravá oblasť obrázka, ktorú sme tu zmenšili) každý užívateľ môže vidieť niečo iné. Napr. učiteľovu zdieľanú obrazovku, chatroom s indíciami k príkladom, chatroom s výsledkami atď. Na priloženom obrázku je práve príklad tejto poslednej možnosti.

Typická discordovská hodina u nás vyzerala nasledovne:

1) Žiaci mali k dispozícii vo svojich Google Classromoch učebné materiály z predošlých hodín (texty, screenshoty z online tabule, odkazy na videá atď.). K väčšine tém patril aj súbor príkladov na precvičovanie.
2) Žiaci otvorili zadania príkladov. V Discorde sa prihlásili do tej videokonferenčnej miestnosti, ktorá bola pomenovaná tak, ako príklad, ktorý práve riešili. Na začiatku procesu bola skoro celá trieda v tej istej miestnosti, ale postupom času

sa žiaci rozptýlili. Prechod z jednej videokonferenčnej miestnosti do inej je pre žiaka aj učiteľa otázka jediného kliknutia.

3) Učiteľ počas hodiny preklikával medzi týmito izbami, a komunikoval so žiakmi. Ak potrebovali pomoc učiteľa, ten, pomocou zdieľanej online tabule, dával indície tým, ktorí to potrebovali. Screenshoty z týchto výkladov je veľmi jednoduché nahrať do príslušného chatu (napr. #indície-k-príkladom) pomocou funkcie LightShot a kombinácie tlačidiel Ctrl+V. Proces nahrávania, ani so zadaním vhodného textového popisu k obrázku (napr. názov témy a číslo úlohy), netrvá viac, ako päť-šesť sekúnd.
4) Ak niekto vyriešil jeden príklad, výsledok zapísal do chatu #riešenia-príkladov. Ak riešenie bolo správne, učiteľ to označil s dohodnutým emotikonom (my sme používali „like” 👍), a žiak mohol prekliknúť do nasledujúcej miestnosti, tj. prejsť na nasledujúci príklad. Ak riešenie nebolo správne, učiteľ výsledok označil červeným krížikom❌. Keď niekto neskoršie dospel k tomu istému správnemu výsledku, dal to najavo tak, že pod správny výsledok umiestnil nejaký veselý emotikon.
5) To, že kto ako postupuje s riešením príkladov, žiaci evidovali aj v zdieľaných tabuľkách. O týchto tabuľkách sme písali vyššie (obr. 4).

Discord sa dal využiť aj vtedy, keď trieda bola rozdelená do skupín, a pracovali skupinovo. Vtedy všetci otvorili ten istý zdieľaný bianko dokument (typicky prázdnu tabuľku s hlavičkou). V Discorde sa rozdelili do niekoľkých skupín, a jednotlivé skupiny, nezávisle od ostatných skupín, mohli pracovať na tej časti témy, ktorá bola pre nich určená. To znamená, každá skupina robila poznámky do toho istého zdieľaného dokumentu, ale do inej časti dokumentu.

4. Ako ďalej?

Na záver musíme ešte raz zdôrazniť, že žiadnu z hore uvedených nápadov nemôžeme považovať za stopercentne vykryštalizovanú metódu. Všetky predstavené „metodické klíčky” vznikli z (často zúfalej) snahy autora čo najviac aktivizovať žiakov počas obdobia nekonečných lockdownov. Je dosť pravdepodobné, že podobné situácie (alebo hybridné vyučovanie) sa môžu zopakovať, preto spomenuté prístupy môžu byť použiteľné aj bez väčších modifikácií.[5]

Digitálne prostriedky však môžu ostať s nami aj v budúcnosti, keď život po pandémii prejde do nového normálu. Črtá sa cesta, keď sa v budúcnosti symbióza digital(izova)nej učebnice, online portálu a zošita posilnia. Ako sme videli, z vyššie

---

[5] Článok bol dokončený začiatkom Septembra 2021. Podľa aktuálnych opatrení a prognóz sa naša škola pripravuje na také situácie, keď v danej triede bude sedieť niekoľko žiakov (zaočkovaní a tí, ktorí prešli chorobou Covid-19), a ostatní v tom istom čase sa zúčastnia tých istých vyučovacích hodín online. Tabuľa a krieda budú digitálne, a s neprítomnými budeme komunikovať cez videokonferenciu.

uvedených príkladov, môžu sa vytvárať zaujímavé učebné materiály napr. s týmito vlastnosťami:

1) **Sú individuálne.** Samotné učebné texty obsahujú dôležité výpočty, odvodenia žiakov formou fotiek zo zošitov žiakov. Veľká časť ilustrácií (napr. o domácich experimentoch) pochádza od samotných žiakov. Niektoré obrázky sú upravené učiteľom – podľa potrieb aktuálnej triedy.
2) **„Komunikujú" so žiakom.** Sú teda interaktívne v tom zmysle slova, že pomocou projektov nabádajú žiakov k samostatnému riešeniu problémov a odvodzovaniu vzťahov na základe krátkych inštrukcií. Tieto riešenia po vhodnom upravení textu tvoria integrovanú súčasť učebného materiálu. Protokoly laboratórnych cvičení tiež „zapadajú" do toku hlavných tém. Digitálna učebnica sa vytvára postupne, pred zrakom žiaka, z hodiny na hodinu, aktívnou participáciou žiaka.
3) **Prehľadné.** Keďže všetky témy sú nahrávané na ten istý portál, samotný portál dbá o to, aby materiály boli prehľadne uložené.
4) **Digitálne, ale aj v tlačenej podobe.** Ak k prehľadnosti (garantovanej portálom) učiteľ ešte pridá jednotný štýl dokumentov (jednotné a logické formátovanie textov, jednotne upravené hlavičky a päty, zrozumiteľné číslovanie strán), tak môžu byť ľahko usporiadané aj po vytlačení. Žiaci tak, napr. na konci tematického celku, môžu obdržať peknú a individuálnu brožúru. Po premyslenom plánovaní môže platiť pravidlo: jedna vytlačená brožúra = jeden tematický celok = materiál pre jedno maturitné zadanie.
5) **Obohatené multimediálnym obsahom.** Digitálna podoba učebných materiálov ľahko integruje odkazy na rôzne videá a animácie. Odkazy na tieto materiály môžu byť vkladané do dokumentov aj formou QR kódov, aby aj po vytlačení boli ľahko prístupné.[6]

Článok sme začali frázou. Patrí sa, aby sme kvôli symetrii aj na konci uviedli jednu: *všetko sa dá predpovedať — okrem budúcnosti*. Nevieme, čo nás čaká na školách v budúcnosti. Nebolo by však rozumné, zodpovedné, logické… (nech si každý vyberie termín, ktorý je mu sympatický), keby sme sa nesnažili o integrovanie skúseností z online obdobia do našej každodennej práce.

Adresa autora: Gábor Tóth, Cirkevná spojená škola MARIANUM, Ulica biskupa Királya 30, 945 01 Komárno;
e-mail: togacska@gmail.com

[6] Nápad autor ešte nestihol vyskúšať v praxi. Inšpiráciou bol jeho kolega. Odkazy na digitálne obsahy totiž môžu byť veľmi dlhé, a vo vytlačenej podobe textu sú málokedy použiteľné. Je rozumné predpokladať, že ak sa niekto učí z textu v papierovej podobe, kvôli jednému odkazu nezapne počítač. Ak však vygenerujeme QR kód zvlášť ku každému digitálnemu obsahu (napr. k zaujímavým videám, animáciám, videotutoriálom atď.), a tieto kódy umiestnime priamo v dokumentoch, žiak k otvoreniu multimediálneho obsahu potrebuje už iba smartfón, vhodnú aplikáciu a niekoľko sekúnd.

62. Medzinárodná matematická olympiáda

14. – 24. 7. 2021

Saint-Petersburg, Ruská federácia

Tento ročník Medzinárodnej matematickej olympiády (IMO) sa mal rovnako ako minulý ročník konať v Petrohrade, avšak kvôli pandémii sa znova konal dištančne. Celkovo sa ho zúčastnilo 619 súťažiacich zo 107 krajín.

Výsledkom tradičného výberového sústredenia (konajúceho sa taktiež online) bol nasledovný šesťčlenný tím:

- Viktor Csaplár, G. H. Selyeho, Komárno, **striebro**, 4. ročník
- Matej Urban, G. Grösslingová, Bratislava, **striebro**, 4. ročník
- Martin Kopčány, G. J. Chalupku, Brezno, **bronz**, 2. ročník
- Csaba Daniel Farkaš, Súkr. gymn. Česká, Bratislava, **bronz**, 3. ročník
- Samuel Koribanič, G. arm. gen. L. Svobodu, Humenné, **ČU**, 3. ročník
- Matej Vasky, G. Alejová, Košice, 2. ročník

Vedúcim družstva SR bol Patrik Bak a jeho zástupcom Martin Melicher. Riešitelia riešili úlohy na pôde Iuventy, kde boli tiež ubytovaní nebratislavskí účastníci. Na regularitu procesu riešenia dohliadal Marián Poturnay.

Študenti riešili počas dvoch dní (19. a 20. júla) dve trojice úloh; za každú úlohu bolo možné získať najviac 7 bodov. Výsledky členov družstva SR na IMO sú uvedené v tabuľke:

meno	1	2	3	4	5	6	súčet	Cena
Viktor Csaplár	7	0	1	7	7	0	22	**striebro**
Matej Urban	6	1	0	7	7	0	21	**striebro**
Martin Kopčány	7	1	0	0	7	0	15	**bronz**
Csaba Daniel Farkaš	6	1	0	7	0	0	14	**bronz**
Samuel Koribanič	7	0	0	0	0	0	7	**ČU**
Matej Vasky	4	0	0	0	0	0	4	

Hranice na získanie bronzovej, striebornej a zlatej medaily boli tento rok postupne 12, 19 a 24 bodov.

V neoficiálnom poradí krajín, ktoré vznikne sčítaním bodov celého družstva, sme sa umiestnili na 39. mieste, čo je oproti minulému roku pokles o 1 priečku. Naši tradiční rivali Česi sa umiestnili na skvelom 16. mieste. Prvú šestku tvorili postupne Čína, Rusko, Južná Kórea, USA, Kanada, Ukrajina. Kompletné výsledky a štatistiky možno nájsť na oficiálnej stránke IMO: http://imo-official.org/year_country_r.aspx?year=2021.

Nasledujúce ročníky by sa mali konať v Nórsku (Oslo, 2022), Japonsku (Chiba, 2023), a na Ukrajine (Kyjev, 2024).

Patrik Bak[7]

[7]**Email:** patrik.bak.x@gmail.com.

Úlohy 62. ročníka IMO

Úloha 1. Je dané celé číslo $n > 100$. Ivan napísal každé z čísel $n, n+1, \ldots, 2n$ na jednu kartičku. Potom týchto $n+1$ kariet zamiešal a rozdelil na dve kôpky. Dokážte, že aspoň jedna z týchto kôpok obsahuje dve kartičky, ktorých súčet čísel je druhá mocnina celého čísla.

Úloha 2. Dokážte, že nerovnosť

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

platí pre všetky reálne čísla $x_1, \ldots, x_n$.

Úloha 3. Nech D je vnútorný bod ostrouhlého trojuholníka ABC spĺňajúceho $|AB| > |AC|$ taký, že $|\angle DAB| = |\angle CAD|$. Bod E leží na úsečke AC a spĺňa $|\angle ADE| = |\angle BCD|$. Bod F leží na úsečke AB a spĺňa $|\angle FDA| = |\angle DBC|$. Bod X leží na priamke AC a spĺňa $|CX| = |BX|$. Nech O_1 a O_2 sú postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom ADC a EXD. Dokážte, že priamky BC, EF, O_1O_2 sa pretínajú v jednom bode.

Úloha 4. Nech Γ je kružnica so stredom I a nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník taký, že každá z úsečiek AB, BC, CD a DA sa dotýka Γ. Nech Ω je kružnica opísaná trojuholníku AIC. Časť polpriamky BA za bodom A pretína Ω v X a časť polpriamky BC za bodom C pretína Ω v Z. Časti polpriamok AD a CD za bodom D pretínajú Ω postupne v bodoch Y a T. Dokážte, že

$$|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|.$$

Úloha 5. Dve veveričky, Chip a Dale, nazbierali 2021 orieškov na zimu. Dale očísloval oriešky číslami od 1 do 2021 a vykopal 2021 dierok do kruhu v zemi okolo ich obľúbeného stromu. Ďalšie ráno si Dale všimol, že Chip umiestnil do každej dierky jeden orech nedbajúc na číslovanie. Nešťastný Dale sa rozhodol oriešky preusporiadať postupnosťou 2021 krokov. V k-tom kroku Dale vymení pozície orechov susedných s orechom k. Dokážte, že existuje taká hodnota k, že v k-tom kroku Dale vymení orechy a a b také, že $a < k < b$.

Úloha 6. Nech $m > 2$ je dané celé číslo, A je daná konečná množina (nie nutne kladných) celých čísel a $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ sú podmnožiny A. Predpokladajme, že pre každé $k = 1, 2, \ldots, m$ je súčet prvkov množiny B_k rovný m^k. Dokážte, že A obsahuje aspoň $m/2$ prvkov.

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2020 (49)

JUBILEUM

Prof. Radko Mesiar[8] sedemdesiatnikom

Nadpis som práve napísal a už naň neveriacky pozerám. Keď vidím mladíckeho ducha a množstvo energie, ktorou Radko oplýva, nechcem sám veriť, že už má sedem krížikov na chrbte. Na druhej strane, keď zvážime to množstvo jeho vedeckých výsledkov, mnohým z nás by nestačilo ani 10 životov na ich dosiahnutie – veru, aj tých povestných 7 mačacích životov by bolo málo! Ale poďme zaradom.

Tvorivá atmosféra počas stretnutia prof. Mesiara (vľavo) s prof. Papom z univerzity v Novom Sade

[8] Kontaktná adresa jubilanta: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie, Stavebná fakulta STU, Radlinského 11, 810 05 Bratislava, **e-mail**: radko.mesiar@stuba.sk

Čriepky z biografie

Prof. Radko Mesiar sa narodil 26. augusta 1951. V roku 1969 maturoval na Gymnáziu (vtedy ešte SVŠ – stredná všeobecno-vzdelávacia škola) Jura Hronca v Bratislave. Študoval na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského. Štúdium v roku 1974 úspešne ukončil a nastúpil na internú ašpirantúru (predchodca dnešného doktorandského štúdia) taktiež na Prírodovedeckej fakulte UK pod vedením prof. Riečana. Svoju dizertačnú prácu s názvom Subaditívne martingály obhájil v roku 1979. V roku 1983 sa habilitoval. Profesorom je od roku 1998. V roku 1996 obhájil „veľký doktorát" v Prahe v Českej akadémii vied na ÚTIA (Ústav teorie informace a automatizace).

Od roku 1978 pôsobí na Katedre matematiky a deskriptívnej geometrie Stavebnej fakulty Slovenskej technickej univerzity. V rokoch 1994 až 2000 a od roku 2004 do začiatku roka 2021 bol vedúcim tejto katedry. Svojou prácou pre katedru nadviazal na nezabudnuteľnú vedúcu katedry – prof. Blanku Kolibiarovú, ktorá prevzala vedenie katedry v ťažkých časoch normalizácie a viedla ju až do roku 1990 keď odišla do dôchodku. Systematická práca (nielen personálna) dvojice Kolibiarová - Mesiar priviedla katedru medzi popredné, svetovo uznávané, matematické pracoviská.

Vedecký prínos a vedecká škola

Sme matematici, tak niekoľko suchých čísel nezaškodí. Prof. Mesiar viedol úspešne 20 doktorandov, z toho 2 v zahraničí. Vo WOS má evidovaných 582 prác, 9066 citácií a Hirschov index 47. V Scopuse má evidovaných 605 prác, 10 349 citácií a Hirschov index 51. V Google Scholar si počet publikácií netrúfam spočítať, počet citácií má viac ako 26 600, Hirschov index 66. Týmto sa zaraďuje medzi absolútnu svetovú špičku v matematike. Nie som zástancom kvantitatívnych ukazovateľov pre hodnotenie vedeckých výsledkov, ale tieto čísla sú skutočne impozantné. Za zmienku stojí aj fakt, že počty publikácií a citácií v jednotlivých databázach rástli aj počas písania tohto článku. Takže až sa dostane k čitateľom, tie počty už asi nebudú aktuálne. No čo je podstatné, za tými počtami publikácií sa skrýva neuveriteľne široký záber tematiky, ale aj hĺbka dosiahnutých výsledkov. K najvýznamnejším publikáciám jubilanta patria monografie [1], [2], [3], [4].

K vedeckej škole Radka Mesiara môžeme s kľudným svedomím rátať aj veľký počet spoluautorov jeho vedeckých prác – veď v mnohých prípadoch práve náš Radko Mesiar bol tvorivým motorom týchto prác. Spoluautorov je, podľa SCOPUS-u, okolo 160! Číslo je spočítateľné, ale netrúfam si to presne spočítať. S výnimkou Antarktídy sú títo spoluautori zo všetkých kontinentov. Čo je však dôležitejšie pre rozvoj matematiky na Slovensku, slovenských spoluautorov nájdeme prakticky vo všetkých popredných matematických pracoviskách na Slovensku.

Medzinárodné a domáce ocenenia

O medzinárodnom uznaní výsledkov práce nášho jubilanta svedčí aj jeho členstvo v redakčných radách viacerých popredných časopisov – Fuzzy Sets and Systems, Information Sciences, Iranian Journal of Fuzzy Systems, Kybernetika, Axioms, ale aj v iných časopisoch.

V roku 2005 bol Radko Mesiar ocenený Medailou B. Bolzana, ktorú udeľuje Vedecká rada Akadémie vied ČR. V roku 2015 bol náš jubilant ocenený Cenou EUSFLAT (Európska spoločnosť pre fuzzy logiku a technologiu) za excelentný prínos k rozvoju vedy – „EUSFLAT Scientific Excellennce Award". Z domácich ocenení spomeňme aspoň Cenu MŠMT SR, ktorú dostal v roku 2003 za vedecké výsledky. V roku 2009 dostal cenu Vedec STU roku 2009 v kategórii „Významný vedecký prínos" za vytvorenie základov agregačných funkcií (publikovanie monografie Aggregation functions), cenu Vedec STU roka 2017 za významný prínos k zviditeľneniu STU v rámci svetovej vedy, najmä v oblasti matematiky a teoretických základov informačných technológií. Od roku 2017 je Radko Mesiar členom Učenej spoločnosti Slovenska. Tento výpočet ocenení určite nie je úplný. To nakoniec ani nie je cieľom autora príspevku. Skôr tu ide o dokreslenie medzinárodného významu vedeckej práce jubilanta.

Milý Radko, zdvíham virtuálna čašu, aby som si pripil na Tvoje zdravie, šťastie a veľa ďalších úspechov na poli vedeckom aj rodinnom!

Martin Kalina[9]

L i t e r a t ú r a – R e f e r e n c e s

[1] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap: *Triangular norms*, Kluwer, Dordrecht, 2000 (viac ako 4800 citácií)

[2] M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap: *Aggregation functions*, Cambridge University Press, 2009 (1690 citácií)

[3] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar: *Aggregation operators: new trends and applications*, Physica, Heidelberg, 2012 (počet citácií viac ako 700)

[4] T. Calvo, A. Kolesárová, M. Komorníková, R. Mesiar: *Aggregation operators: properties, classes and construction methods*, Physica, Heidelberg, 2002 (viac ako 650 citácií).

[9] Stavebná fakulta STU v Bratislave, Radlinského 11, 810 05 Bratislava,
e-mail: martin.kalina@stuba.sk

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2020 (49)

Ďalší matematik v Žiline je jubilantom - doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.[10]

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
foto: Jan Franců, Jasná pod Chopkom, 2016

Keď mal 70 rokov, ani sme si to v Žiline nevšimli. Veď na to nevyzeral. Upozornil nás na to až článok [1] manželov Bečvářovcov z Karlovej univerzity v Prahe uverejnený v Pokrokoch matematiky, fyziky a astronomie. Teraz má o 5 rokov viac a druhá veta tohto článku platí – stále na to nevyzerá. Veríme, že našu nevšímavosť z pred piatich rokov týmto článkom odčiníme.

Vojtech Bálint sa narodil 10. júna 1946 v Rimavskej Seči. Ako štrnásťročný získal prvú cenu na krajskej súťaži v hre na husliach. Po maturite na Strednej všeobecnovzdelávacej škole v Rimavskej Sobote bol roku 1964 prijatý na Prírodovedeckú fakultu UPJŠ v Košiciach, kde sa špecializoval na štúdium matematickej analýzy. Avšak jeho obľúbený učiteľ Igor Kluvánek, ktorý bol vtedy vedúcou osobnosťou v matematickej analýze (nielen) v Košiciach, odišiel do Austrálie. Tak sa stalo, že diplomovú prácu písal pod vedením Ernesta Jucoviča z geometrie. Dostal za ňu cenu SAV. Geometria bola potom jeho „vedeckým chlebíčkom“ celý jeho pracovný život až do dnešných dní.

Po ukončení univerzitného štúdia v Košiciach nastúpil na jeseň roku 1969 na Katedru matematiky Strojní fakulty ČVUT v Prahe. Odtiaľ po dvoch rokoch prešiel do Žiliny na Vysokú školu dopravnú (dnešná Žilinská univerzita v Žiline - UNIZA), a to na Katedru matematiky a deskriptívnej geometrie Fakulty prevádzky a ekonomiky dopravy (PED), kde pracoval do konca roku 2016 (prvá autorka článku bola jeho kolegyňou na katedre v rokoch 1971-1994). Matematiku začal prednášať roku 1974 na dennom a neskôr aj na diaľkovom štúdiu. Postupne prednášal na všetkých odboroch fakulty PED (dnešná PEDAS – Fakulta prevádzky

[10] Kontaktná adresa jubilanta: doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., Nám. Ľ. Fullu 21, 010 08 Žilina, **e-mail**: vojtech.balint@gmail.com

a ekonomiky dopravy a spojov), istý čas aj na Vojenskej fakulte a tiež vybrané kapitoly z matematiky pre doktorandov inžinierskych vied na viacerých fakultách Žilinskej univerzity v Žiline. Neskôr podľa požiadaviek rôznych pracovísk mu pripadlo prednášať aj predmety: pravdepodobnosť a matematická štatistika, teória grafov, teória čísel, vybrané problémy geometrie, algebra a diskrétna geometria.

V roku 1976 bol prijatý do externej ašpirantúry v odbore geometria a topológia. Pod vedením školiteľa prof. RNDr. Aloisa Šveca, DrSc. sa v rámci ašpirantúry špecializoval na diferenciálnu geometriu. Po vykonaní skúšok a obhajobe rigoróznej práce z diferenciálnej geometrie mu titul RNDr. udelila Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci roku 1977. Titul CSc. získal roku 1981 na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Prahe. Docentom matematiky bol menovaný 1. 10. 1988 na VŠDS v Žiline (v tom čase sa nedalo habilitovať, pravidlá boli iné ako dnes). Podľa nového zákona o vysokých školách sa v roku 2003 habilitoval na UPJŠ v Košiciach. V rokoch 1998-2016 bol vedúcim Katedry matematiky Fakulty PEDAS (neskôr sa premenovala na Katedru kvantitatívnych metód a hospodárskej informatiky) a od roku 2003 tam pracoval vo funkcii mimoriadneho profesora.

Z vedeckého hľadiska zlomovým momentom bol jeho mesačný študijný pobyt na BME v Budapešti v novembri 1988. Počas neho chodil do knižnice Matematického ústavu Maďarskej akadémie vied a tam sa zoznámil s Jánosom Pachom, ktorý sa stal neskôr jednou z vedúcich osobností v oblasti diskrétnej geometrie a teórie grafov. Na toto zoznámenie Vojto Bálint spomína takto:

> *A práve pri rozhovoroch s ním (J. Pachom) a pri čítaní kolekcie problémov Research Problems in Discrete Geometry od W. Mosera a J. Pacha [2] som zistil, že moja parketa bude asi intuitívna geometria; jednak preto, že obsahuje obrovské množstvo veľmi zaujímavých problémov a tiež preto, že už v roku 1970 som dokázal taký výsledok, o ktorom som si myslel, že by asi nikoho nezaujímal, ale aj po takmer 20 rokoch sa v kvalitných časopisoch objavovali práce so slabším výsledkom ako ten môj. Takže János Pach ma presvedčil, že ten môj výsledok treba publikovať. Odvtedy som sa snažil pracovať v tejto problematike a v roku 2007 som napísal vedeckú monografiu [3] o tejto problematike.*

A o svojich ďalších publikačných aktivitách hovorí:

> *Keďže som učil na univerzite technického zamerania, občas som vo výskume „navštívil“ aj inžinierske oblasti (akustika, doprava, letectvo, stavbárske problémy). Nemálo som však napísal aj o vyučovaní, najmä matematiky na technikách. V posledných rokoch bolo takýchto článkov*

> *dosť veľa, pretože som sa pokúšal aktívne liečiť neduhy nášho školstva (aj keď treba dodať, že málo úspešne). Tieto moje články mali nemalý ohlas, o čom svedčí napr. aj pozvanie prednášať na konferenciu v Prahe na Karlovej univerzite v roku 2010 (a potom ešte veľakrát) a povzbudzujúce vyjadrenia mnohých učiteľov základných a stredných škôl.*

Publikačná činnosť Vojtecha Bálinta je rozsiahla. Je autorom alebo spoluautorom viac ako 15-tich vysokoškolských skrípt a učebníc, viac než 50-tich vedeckých prác z oblasti diskrétnej geometrie publikovaných v domácich a zahraničných časopisoch alebo na konferenciách, viac než 50-tich článkov na aktuálne témy v školstve a vyučovaní matematiky. Jeho názory sú niekedy netradičné, ale podnecujú k zamysleniu sa o možných nápravách. Dôležitú súčasť jeho vedeckej práce tvoria články z histórie matematiky, pravidelne sa aktívne zúčastňuje medzinárodnej konferencie Historie matematiky. Je spoluautorom publikácie *The Development of Mathematics Between the World Wars* [4], ktorá vyšla v tomto roku.

Od roku 1990 organizoval Vojtech Bálint na Katedre matematiky Fakulty PEDAS vedecký seminár s názvom „Intuitívna geometria“. V rámci tohto seminára sa konalo viac ako 180 stretnutí a diskusií zameraných najmä na problémy diskrétnej geometrie, pakovacie a pokrývacie problémy, problémy množín bodov s danou vlastnosťou a podobne. Na seminári zazneli najnovšie výsledky, ako aj otvorené problémy v danej oblasti, a preto bol seminár výbornou inšpiráciou k tvorivej vedeckej práci účastníkov seminára, ktorými boli nielen kolegovia z katedry, ale aj z iných katedier UNIZA, najmä pre jeho doktorandky, ktorým bol školiteľom. Významným účastníkom tohto seminára bol doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc. (1948-2015), ktorého vedecké výsledky v oblasti geometrie sú v matematickej komunite vysoko cenené, podobne ako výsledky docenta Bálinta.

Docent Bálint bol členom spoločnej odborovej komisie (SOK) pre doktorandské štúdium v odbore 11-16-9 Geometria a topológia na FMFI UK v Bratislave a zároveň bol aj školiteľom doktorandov v tomto vednom odbore. Pod jeho vedením úspešne ukončili doktorandské štúdium dve doktorandky (jednou z nich je druhá autorka tohto článku). Na UNIZA bol pomocným školiteľom pre predmet aplikovaná matematika viac ako 250 doktorandom inžinierskych vedných odborov. Bol tiež členom SOK na UKF v Nitre vo vednom odbore teória vyučovania matematiky. Viac ako 8 rokov bol členom pracovnej skupiny Akreditačnej komisie SR pre matematiku.

Vojtech Bálint viac ako 47 rokov aktívne pôsobí v matematickej olympiáde (MO) a venuje sa matematickým talentom. Predsedom Slovenskej komisie matematickej olympiády (SKMO) ho menoval minister školstva v roku 2001. V tom čase bola matematická olympiáda finančne podhodnotená. Práve zásluhou

Vojtecha Bálinta sa podarilo dosiahnuť podstatné navýšenie financií na matematickú olympiádu, a tiež priviesť k práci v matematickej olympiáde mladých ľudí. Po splnení tohto hlavného cieľa funkciu zložil a na jeho návrh ho vo funkcii predsedu SKMO v roku 2009 vystriedal Mgr. Peter Novotný, PhD. V rokoch 1996-2013 viedol 11-krát 6-členné družstvá Slovenska na medzinárodnej matematickej olympiáde (Bombaj, Washington, Glasgow, Tokio, Atény, Mexiko, Ľubľana, Hanoj, Madrid, Brémy a Santa Marta v Kolumbii).

Vedúcim riešiteľom projektov VEGA v rokoch 1994 – 2008 bol celkovo v piatich projektoch. Pre MO získal dvakrát grantovú podporu APVV. Taktiež vypracovával posudky na projekty VEGA, KEGA a APVV, ale aj na dva americké projekty, ktoré financuje Národný bezpečnostný úrad USA. Recenzoval veľmi veľa vedeckých prác pre časopisy, bol oponentom niekoľkých habilitačných a mnohých dizertačných prác a bol aj členom inauguračných komisií.

V roku 2009 bol v rámci projektu Marie Curie na dvojmesačnom pracovnom pobyte v Rényi Institute v Maďarsku, kde absolvoval aj tri pozvané prednášky. Ako pozvaný prednášajúci prednášal aj na iných pracoviskách v Budapešti, taktiež na UPJŠ v Košiciach, UMB v Banskej Bystrici, na ČVUT v Prahe, na VUT v Brne, v Bydgoszczi v Poľsku, na KU v Prahe. Nesmieme zabudnúť ani na konferenciu slovenských matematikov v Jasnej pod Chopkom, kde prezentoval svoje vedecké výsledky ako pozvaný prednášajúci niekoľkokrát, a vyjadroval sa aj k vyučovaniu matematiky a k MO. Ako šéfredaktor časopisu *Studies of the University of Žilina - ma-thematical series* vytvoril medzinárodnú redakčnú radu. Okrem toho je v súčasnosti členom redakčných rád časopisov OMFI a PMFA.

V rámci JSMF bol Vojtech Bálint výrazne aktívny. Okrem pôsobenia vo vrcholných orgánoch MO, bol predsedom Komisie pre vyučovanie matematiky na vysokých školách technických, ekonomických a poľnohospodárskych, v rámci ktorej usporiadal 28. medzinárodnú konferenciu s týmto zameraním v Rožňave. Tiež bol členom výboru SMS. Za jeho prácu v rámci MO mu bola v roku 2014 udelená Veľká medaila sv. Gorazda a v roku 2012 bol ocenený ministrom školstva pri príležitosti 150. výročia založenia Jednoty. Za jeho pedagogickú činnosť mu rektorka UNIZA udelila pamätnú medailu Jána Amosa Komenského.

Vojto je nielen skvelý matematik a pedagóg, ale aj výnimočný človek. Je náročný nielen voči študentom a kolegom, ale aj voči sebe. Preto sa teší prirodzenej úcte a rešpektu, vždy rád poradí a pomôže. V živote sa riadi mottom „Nerob nikomu to, čo nechceš, aby iní robili tebe". Je nadšencom vysokohorskej turistiky, zdolal väčšinu tatranských štítov. Na Gerlachovskom štíte bol trikrát a záujemcom o turistiku vrelo odporúča Vysokú. Miluje hudbu a je nadšený rybár a tiež vášnivý hubár.

K životnému jubileu Vojtovi prajeme pevné zdravie, veľa osobnej pohody, entuziazmu pri plnení si snov a ešte potešenie z dosiahnutých matematických výsledkov v ďalších rokoch.

Mariana Marčoková[11] *a Zuzana Sedliačková*[12]

L i t e r a t ú r a – R e f e r e n c e s

[1] J. Bečvář, M. Bečvářová: *Sedm desetiletí Vojtecha Bálinta.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 61, č. 4 (2016), 355-357.
[2] W. Moser, J. Pach: *Research problems in discrete geometry.* 1993.
[3] V. Bálint: *Kombinatorická geometria, výber niektorých štrukturálnych problémov.* Žilinská univerzita v Žiline, 2007.
[4] M. Bečvářová a kol.: *The Development of Mathematics Between the World Wars.* World Scientific, 2021.

[11] JSMF, pobočka Žilina, ul. 1. mája 32, 010 01 Žilina, **e-mail**: mariana.marcokova@gmail.com
[12] Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, **e-mail**: zuzana.sedliackova@fstroj.uniza.sk

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky FPV UKF, Trieda A. Hlinku č. 1, 949 74 Nitra
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
3/2021 ročník 50

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková
Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 550 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: apríl 2021

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal “Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences”
OMFI 3/2021 Volume 50
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

CONTENTS