UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

NEURČITOSŤ, ŠTRUKTÚRY A KATEGÓRIE

Dizertačná práca

Apríl 2020

Dušana Babicová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

NEURČITOSŤ, ŠTRUKTÚRY A KATEGÓRIE

Dizertačná práca

Študijný program:	9-1-9 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Matematický ústav SAV, d.p. Košice
Školiteľ:	doc. RNDr. Roman Frič, DrSc.
Školiteľ špecialista:	doc. PaedDr. Martin Papčo, PhD.

Apríl 2020

Dušana Babicová

80565312

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Mgr. Dušana Babicová
Študijný program: aplikovaná matematika (Jednoodborové štúdium, doktorandské III. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: dizertačná
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Neurčitosť, štruktúry a kategórie
Uncertainty, Structures and Categories

Anotácia: Dizertačná práca je príspevkom k vybudovaniu súvislej teórie zovše- obecnenej pravdepodobnosti v jazyku A-posetov a pomocou metód teórie kategórií.

Cieľ: Cieľom je zvoliť vhodné štruktúry, popísať ich vlastnosti a využiť ich pri konštrukcii dôležitých pojmov zovšeobecnenej teórie pravdepodobnosti.

Literatúra: Frič, R.: Remarks on statistical maps and fuzzy (operational)random variables. Tatra Mountains Mathematical Publ. 30 (2005), 21--34.

Frič, R., Papčo, M.: A categorical approach to probability. Studia Logica 94 (2010), 215--230.

Frič, R., Papčo, M.: Fuzzification of crisp domains. Kybernetika 46 (2010), 1009--1024.

Kľúčové slová: Neurčitosť, zovšeobecnená pravdepodobnosť, kategoriálny prístup, A-poset, Lukasiewiczov klan, pozorovateľná, stochastický kanál, linearizácia, epireflexia, spoločný experiment, stochastická nezávislosť, podmienená pravdepodobnosť.

Školiteľ: doc. RNDr. Roman Frič, DrSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Dátum zadania: 10.08.2016

Dátum schválenia: 10.08.2016 prof. RNDr. Anatolij Dvurečenskij, DrSc.
garant študijného programu

....
študent školiteľ

Poďakovanie

Ďakujem mojim školiteľom doc. RNDr. Romanovi Fričovi, DrSc., a doc. PaedDr. Martinovi Papčovi, PhD., za odborné rady, vedenie, usmernenia a konštruktívne pripomienky, ale aj povzbudenia, ktoré mi poskytli, a čas, ktorý mi venovali pri písaní tejto práce aj celkovo počas môjho štúdia.

Abstrakt

Predkladaná dizertačná práca sa venuje skúmaniu teórie zovšeobecnenej pravdepodobnosti pomocou metód teórie kategórií. Ide o jednu z odpovedí na výzvu L. Zadeha na konštrukciu teórie fuzzyfikovanej pravdepodobnosti, a to v podobe minimálneho kategoriálneho (epireflektívneho) rozšírenia kolmogorovovského uchopenia. Pravdepodobnostný integrál je v nej poňatý ako linearizácia náhodných udalostí. Súčasťou textu sú aj výsledky zo štúdia stochastickej (ne)závislosti a podmienenej pravdepodobnosti v zovšeobecnenom pravdepodobnostnom priestore. Sumáru a podrobnému opisu výsledkov predchádza priblíženie teoretického rámca celej problematiky v miere primeranej dizertačnej práci. Výklad by mohol poslúžiť v procese výučby teórie pravdepodobnosti a matematických štruktúr, ale aj poskytnúť podnety pre ďalší výskum v oblasti matematických a filozofických základov teórie pravdepodobnosti.

Kľúčové slová: Klasická teória pravdepodobnosti, teória zovšeobecnenej pravdepodobnosti, pravdepodobnostný integrál, fuzzyfikácia, linearizácia náhodných udalostí, A-poset fuzzy množín, pozorovateľná, združený experiment, stochastická závislosť, podmienená pravdepodobnosť, teória kategórií, epireflektívna podkategória, kategoriálny súčin.

Abstract

The present dissertation is devoted to investigation of generalized probability theory via categorical methods. It offers an answer to L. Zadeh's challenge to construct a fuzzified probability theory, namely, we present a minimal categorical (epireflective) extension of kolmogorovian approach. Probability integral is perceived as a linearization of random events. We present our results related to stochastic (in)dependence and conditional probability in generalized probability space. We provide appropriate background information, results and their summary. Our presentation could serve in teaching probability theory and mathematical structures, as well as to provide inspiration for future research in the area of mathematical and philosophical foundations of probability theory.

Keywords: Classical probability theory, generalized probability theory, probability integral, fuzzification, linearization of random events, A-poset of fuzzy sets, observable, joint experiment, stochastic independence, conditional probability, category theory, epireflective subcategory, categorical product.

Obsah

Úvod

Napriek tomu, že fenomén neurčitosti – a to dokonca v rozličných podobách – je neustále prítomný v bežnom i menej bežnom živote človeka i ľudskej spoločnosti, jeho matematický opis je problematický, ba v niektorých situáciách až prakticky nemožný. Rozmanitá *plnokrvná* neurčitosť sa uchopeniu *rigidnou* matematikou bráni. Svedčí o tom aj viacero, už v minulosti, známych paradoxov. Jednou z matematických teórií, ktoré sa zaoberajú opisom neurčitosti, a to konkrétne spojenej s budúcimi udalosťami či javmi, je teória pravdepodobnosti. Zjednodušene možno tvrdiť, že jej ambíciou je jednak ich opis, jednak odhad miery, s akou môžu nastať. V zábere je teda iba jeden typ neurčitosti, na deskripciu iných primerané/dostatočné nástroje nemá. V kontexte práce o zovšeobecnenej pravdepodobnosti je vhodné poukázať na to, že prostredníctvom „klasických“ pojmov nemožno uchopiť tzv. fuzzy neurčitosť (čiže uvažovať aj o javoch, ktoré sú s istou mierou vzdialené od ideálu). Spomínaná neurčitosť je predmetom štúdia tzv. fuzzy matematiky. Ide o oblasť so značným progresom výskumu, vďaka čomu sa dnes ponúka celá paleta matematických štruktúr, umožňujúcich opísať rôzne neurčité javy. Pri opisovaní jednotlivých štruktúr a ich vzájomných vzťahov sa však často zachádza do detailov a s narastajúcim množstvom informácií sa vlastne zneviditeľňuje podstata. Naviac rôzni autori skúmajúci tú istú oblasť často používajú rôznu terminológiu, *naoko* sú výsledné teórie nesúvisiace, ťažko ich porovnať a dať do súvisu. A preto je namieste otázka, či je možné konzistentne a efektívne matematicky uchopiť neurčitosť. Azda už tu sa hodí *neurčitá* – možno povedať fuzzy alebo dokonca aj kvantová – odpoveď: áno aj nie. Moja dizertačná práca je snahou prispieť k pozitívnej odpovedi na ňu. Ako už ukázalo viacero odborníkov na predmetnú tému, efektívny jazyk umožňujúci rozličné modely neurčitosti uchopiť v združenom kontexte a vzájomnom súvise ponúka teória kategórií, pričom jej potenciálom je pozrieť sa na problematiku viac *zhora*. Jej jazyk vo všeobecnosti umožňuje dať do perspektívy zdanlivo nesúvisiace oblasti matematiky, identifikovať a opísať niektoré základné konštrukcie a zároveň prostredníctvom univerzalizujúcej terminológii a diagramom poukázať na analogické konštrukcie. Izolované matematické disciplíny sa tak ocitajú na jednom združenom matematickom *ihrisku*, nie každá na *vlastnú päsť* vo svojom priestore bez možnosti komunikovať s ostatnými *aktérmi*.

Predkladaná práca sa venuje teórii zovšeobecnenej pravdepodobnosti, v ktorej je klasický pravdepodobnostný priestor nahradený zovšeobecneným pravdepodobnostným priestorom. Ambíciou teórie zovšeobecnenej pravdepodobnosti je do modelu zahrnúť okrem aspektu náhodnosti aj fuzzy aspekt, čím možno na skúmaný jav poskytnúť komplexnejší pohľad. Ide vlastne o jednu z reflexií na návrh L. Zadeha. V teórii figurujú zovšeobecnené náhodné udalosti z množiny $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ všetkých **A**-merateľných funkcií do jednotkového intervalu, ktorých miera je určená pravdepodobnostným intergrálom vzhľadom k pravdepodobnostnej miere.

Text práce je koncipovaný tradične, pričom jeho ťažiskom sú dve časti: tá prvá poskytuje čitateľovi obraz súčasného stavu v skúmanej problematike (východiská) a na ňu nadväzuje druhá s opisom a sumarizáciou výsledkov dosiahnutých počas môjho doktorandského štúdia pod vedením mojich školiteľov. Menovite je cieľom ponúknuť prehľad o rôznych typoch neurčitosti, spôsobov ich matematického modelovania, ako aj o filozofickom pozadí. Špeciálne je práca zameraná na štúdium fuzzy neurčitosti, zovšeobecnenej pravdepodobnosti a súvisiacich matematických štruktúr. K problematike sa pristupovalo pomocou elementárnych metód teórie kategórií. Záver patrí náčrtu perspektív ďalšieho bádania.

Z hľadiska metodického prístupu dizertačná práca pokračuje v duchu kategoriálneho prístupu R. Friča a M. Papča k teórii zovšeobecnenej pravdepodobnosti (pozri [20], [24]). Na rozdiel od ich modelovania náhodných udalostí prostredníctvom D-posetov fuzzy podmnožín univerza, v tejto práci budú na takýto účel využívané A-posety, zavedené V. Skřivánkom (pozri [60]). Časť výsledkov možno považovať za reformuláciu tvrdení spomínaných autorov práve v jazyku A-posetov. Vzhľadom na istú pridanú hodnotu takéhoto prístupu jazyk A-posetov je uplatnený aj v nových tvrdeniach. Súčasnou ambíciou je ukázať, že teória kategórií, jej postupy a konštrukcie sú vhodnými nástrojmi na skúmanie teórie zovšeobecnej (fuzzy) pravdepodobnosti a umožňujú ju dať do kontextuálneho rámca s inými modelmi pravdepodobnosti. To môže pomôcť nielen nájsť dostatočný argument odôvodňujúci Zadehovo poňatie, ale aj v snahe predstaviť ucelenejší matematický prístup k neurčitosti a pravdepodobnosti.

Vzhľadom na to, že zaviesť širokou odbornou verejnosťou akceptovaný názov pomerne novej teórie nie je jednoduché, v zhode s R. Fričom a M. Papčom, používam zatiaľ v článkoch a budem aj v celom tomto texte používať výraz *zovšeobecnená* alebo *fuzzyfikovaná* pravdepodobnosť (hoci som si vedomá, že niektorí odborníci by mohli mať terminologické výhrady).

Práca sa delí na štyri kapitoly:

Prvá kapitola je priblížením matematického chápania neurčitosti v minulosti a dnes. V druhej kapitole čitateľ nájde teoretické východiská dizertačnej práce. Ide najmä o základné pojmy z fuzzy logiky a teórie kategórií a vysvetlenie teórie zovšeobecnej pravdepodobnosti, ako aj výsledky autorov, ktorí túto tému skúmali predo mnou a v ktorých práci pokračujem. Zámerom ďalších dvoch kapitol je predstaviť dosiahnuté výsledky, ktoré boli publikované aj vo forme dvoch článkov, ktorých kópie sú priložené na konci práce. V tretej kapitole vysvetľujem, prečo je pravdepodobnostný integrál vhodným a prirodzeným rozšírením pravdepodobnostnej miery. Ide najmä o opis komplexného dôvodu založeného na kategoriálnom prístupe k pravdepodobnosti a uplatňovanie prirodzenej požiadavky lepšieho rozhodovania o neurčitých javoch. Štvrtá kapitola je venovaná zovšeobecneniu stochastickej (ne)závislosti a podmienej pravdepodobnosti.

Hlavným cieľom dizertačnej práce je prispieť k vybudovaniu súvislej teórie zovšeobecnenej pravdepodobnosti v jazyku štruktúry A-posetov pomocou metód teórie kategórií.

Jeho dosiahnutiu napomáhajú nasledujúce čiastkové ciele:

- Ponúknuť čitateľovi prehľadný náčrt rôznych typov a spôsobov modelovania neurčitosti.
- Porovnať jednotlivé štruktúry používané rôznymi autormi v modelovaní pojmov teórie zovšeobecnenej pravdepodobnosti. Ukázať, prečo sú na to A-posety vhodnou štruktúrou.
- Opísať základnú kategóriu a jej podkategórie tak, aby všetky pojmy a konštrukcie klasickej (Kolmogorovej) teórie pravdepodobnosti v nej boli obsiahnuté ako špeciálny prípad.
- Ukázať, prečo je pravdepodobnostný integrál naozaj vhodným a prirodzeným rozšírením pravdepodobnostnej miery – opísať komplexný dôvod založený na kategoriálnom prístupe k pravdepodobnosti a prirodzenej požiadavke lepšieho rozhodovania o neistých javoch.

- Študovať a opísať stochastickú nezávislosť, závislosť a podmienenú pravdepodobnosť v teórii zovšeobecnenej pravdepodobnosti.
- Hľadať ďalšie perspektívy bádania v tejto oblasti.

1 Poznámky o neurčitosti

V každodennom živote človek potrebuje robiť racionálne rozhodnutia. Často sa jeho rozhodovanie týka *neurčitých, neistých, nepresných* javov. Matematika je disciplína, ktorá oddávna slúži ľuďom v efektívnom opise rôznych fenoménov a ich racionálnom vyhodnocovaní podľa určených pravidiel. Niektoré javy nastanú v budúcnosti a závisia od náhody. Ako o nich môžeme matematicky rozprávať a podľa čoho sa v takýchto situáciach rozhodovať, zaujímalo rôznych učencov už v dávnej minulosti.

V dejinách nájdeme veľmi rozličné postoje k tejto problematike. V chápaní náhody je veľký rozdiel medzi antickou a novovekou matematikou. Vplyv na to mal najmä náboženský a filozofický svetonázor vtedajších ľudí. Tejto problematike sa venuje L. Kvasz (pozri napr. [44]). V antike sa pojem náhody spájal aj so šťastím alebo nešťastím človeka a jeho ľudským osudom, teda nespadal do kompetencií matematického skúmania. Od 16. storočia začali európski učenci matematicky analyzovať hazardné hry, čím sa náhodné udalosti stali matematicky uchopiteľnými.

Myšlienka kvantifikácie neurčitosti o budúcich udalostiach (priradenie čísla) siaha k J. Bernoullimu: *„Pravdepodobnosť (udalosti) je stupeň istoty a odlišuje sa od nej ako časť od celku.“* (Pozri [5].)

A. N. Kolmogorov (pozri [38]) v minulom storočí axiomatizoval teóriu pravdepodobnosti:

- Pravdepodobnostný priestor je trojica $(\Omega, \mathbf{A}, p)$, kde Ω je množina všetkých výsledkov náhodneho pokusu, $\mathbf{A}$ je (redukované, separované) σ-pole podmnožín Ω, každé $A \in \mathbf{A}$ sa nazýva udalosť, udalosť vo forme $A = \{\omega\}$, $\omega \in \Omega$, sa nazýva elementárna udalosť;

- $p : \mathbf{A} \to [0, 1]$ je normovaná σ-aditívna miera nazývaná pravdepodobnosť, $p(A)$ meria aká je *veľká* $A \in \mathbf{A}$ v porovnaní s Ω;

- najdôležitejším príkladom je $(R, \mathbf{B}_R, p)$, kde R sú reálne čísla, $\mathbf{B}_R$ je reálne Borelovské σ-pole a p je pravdepodobnosť na $\mathbf{B}_R$.

Budúce udalosti, ktoré závisia od náhody sú teda dobre matematicky modelované množinami. Pracuje sa tu s klasickou (dvojhodnotovou) logikou, ktorá priraďuje každému výroku práve jednu pravdivostnú hodnotu (buď 0, alebo 1). To však často nezodpovedá ľudskému bežnému životu, ktorý nie je *čiernobiely*. Ľudia sa z hľadiska klasickej dvojhodnotovej logiky často vyjadrujú *nepresne*, *nejasne*, *neurčito*, používajú pojmy, ktoré *nie sú ostro vymedzené*, sú *vágne* a napriek tomu sú pre nich zrozumiteľné. Ľudská myseľ dokáže vyhodnotiť ako pravdivé, či nepravdivé výroky o *mladom* človeku, *stredne veľkom* dome, či *kôpke* piesku a rozumie relatívnym pojmom ako napr. *veľa* alebo *ľahký*. Pri opise podobných *javov* jazykom klasickej booleovskej logiky sa vyskytnú rôzne problémy, známe paradoxy a v niektorých prípadoch až nemožnosť matematického opisu. V dnešnej dobe je nevyhnutné, aby niektoré úlohy automaticky riešili počítačové stroje fungujúce na základe matematických aplikácií. Preto je nutné vedieť matematizovať aj takéto situácie.

Riešením môže byť fuzzy logika, ktorú prvýkrát predstavil L. Zadeh zavedením fuzzy množín v roku 1965 v jeho článku *Fuzzy sets* (pozri [63]). Vo fuzzy logike je každému výroku priradená jedna z pravdivostných hodnôt z intervalu $[0, 1]$. Fuzzy logika je rozšírením klasickej logiky. Významným prínosom sú viachodnotové logiky (prvú viachodnotovú logiku zaviedol Łukasiewicz, pozri [47]). L. Zadeh (v [63]) zadefinoval fuzzy podmnožinu univerza (nosnej množiny) ako množinu charakterizovanú funkciou príslušnosti, ktorá priradí každému prvku (objektu) univerza stupeň príslušnosti z intervalu $[0, 1]$. Následne na fuzzy podmnožiny rozšíril aj klasické množinové operácie – zjednotenie, prienik, doplnok. Neskôr aj ďalší matematici rozvinuli jeho myšlienky a fuzzy logika a fuzzy množiny sa stali samostatnou matematickou disciplínou s mnohými aplikáciami. Pomocou fuzzy logiky sa matematický jazyk stal zas o niečo schopnejším opisovať svet okolo nás a jej aplikácie sa využívajú vo viacerých oblastiach ľudského života, napr. v automobiloch, domácich spotrebičoch, počítačovej bezpečnosti, biologických vedách, medicíne, finančnej analýze, v oblasti práva aj biznisu atď.

Fuzzy logika má uplatnenie aj v teórii pravdepodobnosti. Klasická teória pravdepodobnosti má množstvo aplikácií, ale v niektorých situáciach sa stáva problematickou. Teória pravdepodobnosti aj fuzzy logika matematizujú neurčité javy, ale ide o dva rôzne typy neurčitosti. V teórii pravdepodobnosti ide o náhodnosť – neurčitosť spočíva v tom, že sa nevie, či daný jav nastane, alebo nenastane. Pracuje sa s náhodnými udalosťami. Vo fuzzy logike ide o stupeň príslušnosti k danému javu – neurčitosť spočíva v tom, v akej miere daný jav nastal. Pracuje sa s fuzzy udalosťami. Ale niekedy sa môžu vyskytovať oba typy neurčitosti (náhodnosť aj fuzzy) naraz, teda či daný jav nastane záleží od náhody (náhodná udalosť) a môže nastať v rôznej miere (fuzzy udalosť). Preto vhodná fuzyfikácia teórie pravdepodobnosti môže priniesť komplexnejší pohľad na skúmanú realitu. (Viac možno nájsť v článku [39].) V reálnom svete nie vždy vieme odmerať dáta úplne presne, pretože napríklad voda v rieke alebo teplota v miestnosti podlieha fluktuácii. Vhodnejšie je povedať, že hladina rieky dosahuje *okolo 10 metrov*, nie *10 metrov*. Výrok *voda dosiahne okolo 10 metrov* bude považovaný za fuzzy udalosť. Aj v rôznych iných prípadoch výsledky náhodných pokusov nemôžu byť poznané alebo pozorované presne a získané údaje sú iba aproximáciou reality. Príkladom situácie, kde pracujeme s *vágnymi dátami* je tiež priradenie subjektívneho vnímania alebo lingvistickej premennej (ako *dosť*, *dobre*, *dostatočne*. . .) k meraným hodnotám, čo sa využíva napr. v dotazníkoch a výskumoch v sociálnej oblasti. V prípadoch skúmania takýchto fuzzy udalostí môže byť fuzzy logika a teória fuzzy množín dobrým nástrojom na modelovanie pravdepodobnostného modelu skúmaného javu. Tento prístup navrhol v [63] L. Zadeh a bude podrobne analyzovaný na ďalších miestach v tejto práci.

Častým nedorozumením je stotožňovanie pravdepodobnosti $p(A)$ so stupňom príslušnosti $\mu_A(x)$. Pri úvahach o $\mu_A(x)$ je argument x fixovaný a dobre známy a množina A je fuzzy podmnožina univerza. Ale čo sa týka $p(A)$, množina A je dobre definovaná, zatiaľ čo hodnota premennej x, ktorá je priradená k $p(A)$ je neistá a pohyblivá. Pravdepodobnosť p priradí každej merateľnej podmnožine základnej množiny Ω číslo z $[0, 1]$ podľa Kolmogorových axióm:

$$p(\Omega) = 1,$$

$$p(\emptyset) = 0,$$

$$\text{ak } A \cap B = \emptyset, \text{ tak } p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

Za určitý most medzi teóriou pravdepodobnosti a fuzzy matematikou sa dá podľa D. Duboisa považovať posibilistická teória, v ktorej sa uplatňuje zobrazenie Π zo základnej množiny Ω do intervalu $[0, 1]$ rešpektujúc axiómy:

$$\Pi(\emptyset) = 0,$$

$$\Pi(A \cup B) = \max\{\Pi(A), \Pi(B)\},$$

(pozri [61]).

D. Dubois a H. Prade sa venujú vzťahu medzi teóriou pravdepodobnosti, posibilistickou teóriou a fuzzy matematikou. Všetky tri matematické teórie opisujú neurčitosť, ale každá z iného uhlu pohľadu, vlastným jazykom a axiómami. Ide o tri rôzne aspekty, ktoré sa podľa nich nesmú stotožnovať alebo nejako vzájomne redukovať. D. Dubois a H. Prade sa v článku [13] venujú dileme *„pravdepodobnosť versus fuzzy“* a upozorňujú na to, že tieto disciplíny si neprotirečia, ale môžu sa dopĺňať. Vysvetľujú problematiku a hovoria o možných prepojeniach medzi nimi. O pravdepodobnosti a fuzzy matematike by sa nemalo rozmýšľať ako o dvoch rôznych vylučujúcich sa alternatívach, lebo ich spojením je možné získať mnoho výhod, tým že sa zväčší rámec možností modelovania neurčitosti a vágnosti, ktoré obe disciplíny opisujú, čo vrhá nové svetlo na starú prax.

Okrem spomínaného existuje ešte veľa iných matematických prístupov k neurčitosti a pravdepodobnosti. Spomeniem aspoň subjektívnu teóriu pravdepodobnosti a kvalitatívnu teóriu pravdepodobnosti. Viac sa im venuje D. Gillies v [32].

2 Teória zovšeobecnenej pravdepodobnosti: teoretické východiská

V [63] L. Zadeh navrhol nahradiť klasický pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ zovšeobecneným pravdepodobnostným priestorom $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$, kde $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ je množina všetkých merateľných funkcií z $\mathbf{A}$ do [0,1] a $\int(.)\mathrm{d}p$ je pravdepodobnostný integrál vzhľadom k miere p. Neskôr L. Zadeh navrhol maximum, minimum a komplement ako operácie na fuzzy udalostiach a sústredil sa hlavne na aplikácie v inžinierskej praxi a soft computingu.

M. Navara poznamenáva v [50], že $\int(.)\mathrm{d}p$ je prirodzeným rozšírením p, ale L. Zadeh sa nevenuje „matematickému“ zdôvodňovaniu, prečo práve tento model je tým „najvhodnejším“. M. Navara prostredníctvom dvoch rôznych prístupov (pravdepodobnosť na klanoch a pravdepodobnosť na MV-algebrách so súčinmi) poukazuje na vhodnosť zadehovského modelovania.

Cieľom tejto kapitoly je podať komplexnejšie odôvodnenie Zadehovho modelu pravdepodobnosti, ktoré bude založené na kategoriálnom prístupe k matematike a tiež ukázať na charakteristické vlastnosti pravdepodobnosti, ktoré sú najlepšie vystihnuté v tomto modeli.

2.1 Fuzzy logika

Keďže sa v práci používajú pojmy týkajúce sa fuzzy matematiky, v tejto podkapitole stručne pripomeniem čitateľovi z hľadiska zámeru dizertačnej práce dôležité pojmy z tejto oblasti (podľa [61]).

Tradičným východiskom fuzzy matematiky je identifikácia podmnožiny univerza s jej indikátorovou funkciou:

Definícia 1. Nech $\mathbb{X}$ je univerzom a A jeho podmnožinou. Funkcia $\chi_A : X \to \{0,1\}$ určená predpisom

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in A, \\ 0, & \text{ak } x \notin A, \end{cases}$$

pre každé $x \in \mathbb{X}$, sa nazýva *indikátorová funkcia* podmnožiny A.

S využitím definície 1 možno každú podmnožinu univerza reprezenzovať prostredníctvom jej indikátorovej funkcie. Zároveň každej funkcii definovanej na univerze s oborom hodnôt $\{0,1\}$ jednoznačne zodpovedá nejaká podmnožina univerza. Namiesto podmnožín univerza sa teda možno ekvivalentne zaoberať indikátorovými funkciami definovanými na univerze. Množinovým operáciám (zjednotenie, prienik, rozdiel, doplnok) v takomto ponímaní zodpovedajú vhodné operácie medzi indikátorovými funkciami.

Definícia 2. Nech $\mathbb{X}$ je univerzom. Funkcia $\mu_A : \mathbb{X} \to [0,1]$ sa nazýva *fuzzy podmnožina* A univerza $\mathbb{X}$.

Poznámka 1. Ak μ_A je fuzzy podmnožinou $\mathbb{X}$, tak číslu $\mu_A(x)$ pre $x \in \mathbb{X}$ sa hovorí *stupeň príslušnosti prvku* x *do fuzzy podmnožiny* A. (Samotnej funkcii μ_A sa preto v niektorých textoch hovorí aj *funkcia príslušnosti.*) V takomto kontexte sa teda identifikuje fuzzy podmnožina A univerza $\mathbb{X}$ s množinou usporiadaných dvojíc $\{[x, \mu_A(x)] | \forall x \in \mathbb{X}\}$.

Ak $\mu_A(x) \in \{0,1\}$, pre každé $x \in X$, podmnožina A je klasická (ostrá) množina.

Definícia 3. Nech A je fuzzy podmnožinou univerza $\mathbb{X}$. Množina $\text{Range}(A)$ sa nazýva *oborom hodnôt* A práve vtedy, keď $\text{Range}(A) = \{\mu_A(x)\, | x \in \mathbb{X}\}$.

Definícia 4. Nech A je fuzzy podmnožinou univerza $\mathbb{X}$. Množina $\text{Supp}(A)$ sa nazýva *nosičom* fuzzy podmnožiny A práve vtedy, keď $\text{Supp}(A) = \{x \in \mathbb{X} \,|\, \mu_A(x) > 0\}$.

Definícia 5. Fuzzy podmnožina A univerza $\mathbb{X}$ sa nazýva *prázdnou* práve vtedy, keď pre každé $x \in \mathbb{X}$ platí $\mu_A(x) = 0$.

Definícia 6. Fuzzy podmnožina sa nazýva *konečnou*, ak má konečný nosič.

Definícia 7. Nech A je fuzzy podmnožinou univerza $\mathbb{X}$. Množina $\text{Ker}(A)$ sa nazýva *jadrom* fuzzy podmnožiny A práve vtedy, keď $\text{Ker}(A)$: $\text{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{X} \,|\, \mu_A(x) = 1\}$.

Definícia 8. Fuzzy podmnožina A univerza $\mathbb{X}$ sa nazýva *normálnou*, ak existuje také $x \in \mathbb{X}$, že $\mu_A(x) = 1$. V opačnom prípade sa nazýva *subnormálnou.*

Definícia 9. Fuzzy podmnožina A univerza $\mathbb{X}$ sa nazýva *konvexnou*, ak pre každé $x, y \in \mathbb{R}$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ platí $\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$.

Definícia 10. Fuzzy podmnožiny A, B univerza $\mathbb{X}$ *sa rovnajú*, ak $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ pre každé $x \in \mathbb{X}$.

Definícia 11. $A \subset B,$ práve vtedy, keď $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ pre každé $x \in \mathbb{X}$.

Definícia 12. *Fuzzy jednotkou* sa nazýva fuzzy podmnožina A univerza $\mathbb{X}$, ktorého nosič je jediný bod x s funkciou príslušnosti $\mu_A(x) = 1$.

Existuje celé spektrum operácií s fuzzy podmnožinami. Medzi ne patria najmä trojuholníkové normy a konormy, ktoré sú rozšírením prieniku a zjednotenia množín na fuzzy podmnožiny.

Trojuholníkové normy (krátko t-normy) sú funkcie, ktoré sa používajú na modelovanie konjunkcie vo fuzzy logikách a pri zovšeobecnení prieniku fuzzy podmnožín.

Definícia 13. Funkcia $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ sa (podľa [37]) nazýva *trojuholníkovou normou* práve vtedy, keď pre každé $x, y, z \in [0,1]$ platí:

(T1) $T(x,y) = T(y,x),$ *komutatívnosť*;

(T2) $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z),$ *asociatívnosť*;

(T3) $T(x,y) \leq T(x,z),\ ak\ y \leq z,$ *neklesajúcosť*;

(T4) $T(x,1) = x,$ *hraničná podmienka.*

Tieto štyri t-normy definované pre $x, y \in [0,1]$ sa (podľa [37]) považujú za *základné*:

- *minimová t-norma* určená predpisom $T_M(x,y) = \min\{x,y\}$;
- *súčinová t-norma* určená predpisom $T_P(x,y) = xy$;
- *Łukasiewiczowa t-norma* určená predpisom $T_L(x,y) = \max\{0, x+y-1\}$;
- *drastický súčin* určený predpisom

$$T_D(x,y) = \begin{cases} \min\{x,y\}, & \text{ak } \max\{x,y\} = 1, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Trojuholníkové konormy (krátko t-konormy) sú funkcie, ktoré sa používajú na modelovanie disjunkcie vo fuzzy logikách a pri zovšeobecnení zjednotenia fuzzy množín.

Definícia 14. Funkcia $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ sa nazýva *trojuholníková konorma*, ak pre každé x, y, z platí:

(*S1*) $S(x,y) = S(y,x)$, *komutatívnosť*;

(*S2*) $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$, *asociatívnosť*;

(*S3*) $S(x,y) \leq S(x,z),\ ak\ y \leq z$, *neklesajúcosť*;

(*S4*) $S(x,0) = x$, *hraničná podmienka.*

Podľa [37] (kde možno nájsť dôkaz) sú t-normy a t-konormy navzájom duálne, t. j.:

Veta 1. *Funkcia* $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ *je t-konorma práve vtedy, keď pre každé* $x, y \in [0,1]$ *platí*

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y), \tag{1}$$

pričom funkcia T je t-norma.

Tieto štyri t-konormy definované pre $x, y \in [0,1]^2$ sú duálne k *základným* t-normám:

- *maximová t-konorma* určená predpisom $S_M(x,y) = \max\{x,y\}$;
- *pravdepodobnostný súčet* určený predpisom $S_P(x,y) = x + y - xy$;
- *Łukasiewiczowa t-konorma* určená predpisom $S_L(x,y) = \min\{1, x+y\}$;
- *drastický súčet* určený predpisom

$$S_D(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\}, & \text{ak } \min\{x,y\} = 0, \\ 1 & \text{inak.} \end{cases}$$

Na modelovanie *vágnych* hodnôt sa používajú fuzzy čísla s funkciami príslušnosti rôzneho typu. Očakáva sa od nich, že budú napĺňať intuitívnu predstavu modelovanej hodnoty. Napr. ak je teplota okolo 5°C, tak je pod tým myslený určitý interval čísel (môže to byť napr. interval $[4; 6]$) a čím sú čísla z daného intervalu bližšie k hodnote 5, tým je ich stupeň príslušnosti k 5 väčší a čím sú ďalej, tým je menší. (Napr. desatinné číslo 4,9 je považované viac za *takmer* 5 než napr. 4,1.) Čísla, ktoré sa nenachádzajú v danom intervale, majú stupeň príslušnosti 0. Číslo 5 má stupeň príslušnosti 1. Túto intuitívnu situáciu a prirodzené vlastnosti, ktoré sú vyžadované, treba matematizovať, čo sa dá urobiť viacerými spôsobmi.

Definícia 15. Fuzzy podmnožina A univerza $\mathbb{X}$ sa (podľa článku [45]) nazýva *fuzzy číslo* práve vtedy, keď A je normálna, konvexná fuzzy podmnožina univerza a nosičom fuzzy podmnožiny A je ohraničená podmnožina reálnych čísel.

Poznámka 2. V zahraničnej literatúre sa často používa názov fuzzy číslo len pre také fuzzy čísla z definície 15, ku ktorým existuje práve jedno také reálne číslo a, že $\mu_A(a) = 1$ a toto reálne číslo a sa nazýva *vrcholom* alebo *modom* fuzzy čísla.

2.2 Teória kategórií

Keďže literatúra týkajúca sa zovšeobecnenej pravdepodobnosti je rozsiahla, k tejto téme existuje mnoho rôznych prístupov, s rôznou terminológiou, ale často s paralelnými výsledkami, R. Frič a M. Papčo boli presvedčení, že kategoriálny prístup k danej problematike by umožnil dať podstatnú časť výsledkov do perspektívy a zorientovať sa v nich vďaka unifikujúcej teórii, v ktorej kolmogorovovská klasika figuruje ako špeciálny prípad. (pozri [20], [24]). Ich pohľad som si osvojila aj ja. V nasledujúcej podkapitole čitateľovi stručne predstavím teóriu kategórii a jej metódy, ktoré sú využívané v práci.

J. A. Goguen v *Kategoriálnom manifeste* (pozri [33]) vyhlásil za *prvú dogmu* kategoriálneho prístupu: *„To each species of mathematical structure, there corresponds a category whose objects have that structure, and whose morphisms preserve it.“* V tejto práci sa hľadá taká kategória, ktorej objekty a morfizmy sú dôležité stochastické pojmy a dobre sa s nimi pracuje (A-posety, pozorovateľné, $\mathbb{ELIA}$...).

Rôzne oblasti matematiky a dokonca rôzni autori skúmajúci tú istú oblasť často používajú rôznu terminológiu, pričom rôzne teórie sa budujú podľa rovnakých princípov a výsledky sú analogické. Ale *naoko* sú nesúvisiace, ťažko ich porovnať a dať do súvisu. V kategoriálnom prístupe sa očakáva zodpovedanie otázok ako: čo sú objekty, ktoré sú ich hlavné vlastnosti, ktoré matematické štruktúry ich modelujú a čo sú zobrazenia (morfizmy) opisujúce vzťahy (dynamiku) medzi objektami? Odpovede dávajú existujúce teórie a výsledky do perspektívy a vedú k lepšiemu porozumeniu možných zjednodušení. Šípky a komutatívne diagramy vizualizujú kľúčové vety a pomáhajú porozumieť ich dôkazom. Teória kategórií umožňuje opísať rôzne štruktúry v tom istom jazyku a tak ich porovnávať a hľadať optimálne. Preto sú metódy teórie kategórií vhodnými nástrojmi aj na skúmanie matematických kvantových štruktúr a zovšeobecnenej pravdepodobnosti (pozri [20]).

Teraz intuitívnou formou zhrnieme niektoré základné pojmy teórie kategórií, ktoré bez zachádzania do technických podrobností uľahčia čitateľnosť práce. Presné definície a podrobnosti čitateľ nájde v práci [1].

Pod kategóriou sa rozumie trieda nejakých prvkov, ktoré nazývame objekty, s definovanými vzťahmi medzi nimi, ktoré sa nazývajú morfizmy (zvyknú sa znázorňovať ako šípky), pričom sú splnené nasledujúce požiadavky:

- Pre každé dva objekty x, y v kategórii súbor $Hom(x, y)$ morfizmov z x do y tvorí množinu.

- V kategórii existuje kompozícia morfizmov: pre všetky objekty x, y, z a všetky morfizmy $f \in Hom(x, y)$ a $g \in Hom(y, z)$ existuje $g \circ f \in Hom(x, z)$.

- Táto kompozícia je asociatívna: Pre všetky objekty x, y, z, w a všetky $f \in Hom(x, y)$, $g \in Hom(y, z)$, a $h \in Hom(z, w)$ platí $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

- V kategórii pre každý objekt x existuje identický morfizmus $\mathrm{id}_x \in Hom(x, x)$ s vlastnosťou: $\mathrm{id}_x \circ f = f$ pre všetky $f \in Hom(t, x)$ a pre všetky objekty t; $f \circ \mathrm{id}_x = f$ pre všetky $f \in Hom(x, y)$ a pre všetky objekty y.

V tejto dizertačnej práci sa narába s množinami, na ktorých je definovaná určitá štrukúra ako s objektmi a so štruktúru zachovávajúcimi zobrazeniami ako s morfizmami (možno ich chápať ako tzv. konkrétne kategórie).

Všetky neskôr dokazované tvrdenia v práci vedú ku kľúčovému tvrdeniu o epireflektívnej podkategórii, ktorá je veľmi dôležitým pojmom v teórii kategórií (pozri [1]) a môžeme ho približne vysvetliť takto: Podkategória $\mathbb{B}$ kategórie $\mathbb{A}$ je epireflektívna v $\mathbb{A}$, ak každý objekt z $\mathbb{A}$ môže byť *pekne vnorený* do nejakého objektu a_B z $\mathbb{B}$ (jednoznačne určený až na izomorfizmus) a každý morfizmus $h : a \ \rightarrow b$, kde b je objekt z B, môže byť jednoznačne rozšírený na jediný morfizmus $h_b : a_B \rightarrow b$.

V našom prípade základné pojmy klasickej téorie pravdepodobnosti sú *reflektované* (cez epireflektor) do ich fuzzyfikácie.

Ďalším dôležitým pojmom z teórie kategórií, ktorý sa využíva v práci je pojem kategoriálneho súčinu dvoch objektov. Objekt A spolu s dvomi morfizmami (nazývanými projekcie) $\mathrm{pr}_i : A \longrightarrow A_i$, $i = 1, 2$, sa nazýva súčinom dvoch objektov A_1 a A_2, ktoré nazývame faktory, ak pre každý objekt B a každé dva morfizmy

$h_i : B \longrightarrow A_i$, $i = 1, 2$, existuje práve jeden taký morfizmus $h : B \longrightarrow A$ taký, že $\mathrm{pr}_i \circ h = h_i$, $i = 1, 2$. Súčin indexovanej triedy faktorov je definovaný analogicky. Ak súčin existuje, tak je jediný (až na izomorfizmus).

2.3 Práca R. Friča a M. Papča

Moja práca nadväzuje na prácu mojich školiteľov R. Friča a M. Papča, ktorí sa dlhodobo venujú téme zovšeobecnenej pravdepodobnosti. Pokračujem spolu s nimi v úsilí o budovanie súvislej teórie zovšeobecnej pravdepodobnosti. Preberám mnohé pojmy aj spôsob prístupu k problematike. Preto v tejto podkapitole stručne predstavím ich prácu a výsledky, ktoré publikovali najmä v článkoch [10, 18–20, 22–31, 53, 55, 56, 60].

V článku [63] L. Zadeh navrhol nahradiť klasický pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ zovšeobecneným pravdepodobnostným priestorom $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$, kde $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ je množina všetkých merateľných funkcií z $\mathbf{A}$ do [0,1] a $\int(.)\mathrm{d}p$ je pravdepodobnostný integrál vzhľadom k miere p. V tomto priestore sú klasické náhodné udalosti, reprezentované indikátorovými funkciami množín zo σ-pola $\mathbf{A}$, rozšírené na fuzzy náhodné udalosti, reprezentované množinou $\mathcal{M}(\mathbf{A}) \subset [0, 1]^\Omega$ všetkých merateľných fuzzy množín. Pravdepodobnosť je rozšírená na pravdedobnostný integrál.

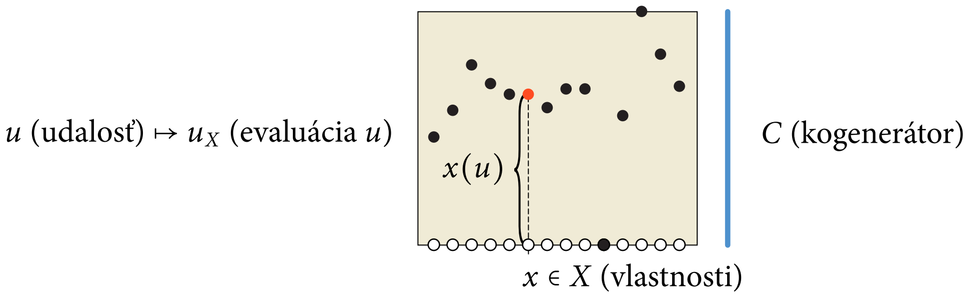
Existuje tiež mnoho iných prístupov k problematike, výsledky sú rozsiahle, často neprehľadné, komplikované, niekedy paralelné, ale v iných jazykoch matematiky. Preto cieľom R. Friča a M. Papča bolo pomocou teórie kategórií vybudovať súvislú teóriu, ktorá sa bude na jednotlivé prístupy pozerať viac zhora.

V článku [30] sa venujú potrebe „zlomkov“ v teórii pravdepodobnosti, t.j. potrebe akýchsi „čiastočných udalostí“, teda fuzzy udalostí. Ukazujú, že napr. niektoré transformačné úlohy bez fuzzy udalostí nemajú riešenie.

V článku [26] navrhli konštrukciu pravdepodobnostnej domény ako všeobecnej konštrukcie na opis rôznych modelov náhodných udalostí. V predmetnom modeli náhodnú udalosť chápeme ako „výrokovú funkciu“ $u : X \longrightarrow [0, 1]$, definovanú na výsledkoch experimentu, pričom $u(x)$ vyjadruje „pravdivostnú hodnotu“ výroku u pre výsledok $x \in X$. Pritom na udalostiach je vhodná logická štruktúra (D-poset, efektová algebra, Łukasiewiczov klan, ...). Z pohľadu teórie kategórií je interval $[0, 1]$ (vybavený príslušnou logickou štruktúrou) kogenerátorom a udalosti sú vnorené do kategoriálnej mocniny $[0, 1]^X$.

Ich prístup k pravdepodobnostným doménam môžeme zosumarizovať nasledovne (pozri [26]).

- Nech $\mathcal{A}$ je systémom udalostí.
- Nech C je množina so štruktúrou umožňujúcou „meranie“. Na takýto účel môže slúžiť napríklad dvojhodnotová Booleova algebra $\{0{,}1\}$, jednotkový interval $I = [0, 1]$ s Lukasiewiczovou MV-algebrou alebo poňatý ako D-poset.
- Nech X je množina „vlastností“ merateľných pomocou C tak, že X separuje $\mathcal{A}$.
- Každá udalosť $a \in \mathcal{A}$ sa reprezentuje ako „evaluácia“ a do C^X, zobrazujúc $a \in \mathcal{A}$ na $a_X \in C^X$, $a_X \equiv \{x(a);\ x \in X\}$ (pozri obr. 1).
- Vytvorí sa minimálna „subalgebra“ D algebry C^X, ktorá obsahuje $\{a_X;\ a \in \mathcal{A}\}$ (pozri obr. 2).
- Podalgebra D algebry C^X predstavuje *pravdepodobnostnú doménu* $D \subseteq C^X$, ktorá má užitočné kategoriálne vlastnosti.



Obr. 1

$$\begin{tikzcd}
\text{(udalosti)}\ \mathcal{U} \arrow[r, hook, dashed] \arrow[dr, hook, dashed, "\text{evaluácia}"'] & C^X\ \text{(algebra)} \\
& D\ \text{(podalgebra)} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Obr. 2

Polia množín, ID-posety a bold algebry sú typickými príkladmi pravdepodobnostných domén, ktorých konštrukcia bola opísaná vyššie (viac pozri v [52], [53], [54]. Netradičné kogenerátory poskytnú netradičné modely teórie pravdepodobnosti ([55]).

V koncepte teórie zovšeobecnenej pravdepodobnosti R. Friča a M. Papča hrá ako štruktúra kľúčovú úlohu D-poset. D-posety zaviedli F. Kôpka a F. Chovanec v [41], aby modelovali udalosti v kvantovej teórii pravdepodobnosti. Zovšeobecňujú Booleove algebry, MV-algebry a iné pravdepodobnostné domény a poskytujú kategóriu, v ktorej sa pozorovateľné a stavy stanú morfizmami ([10], [59]).

Definícia 16. *D-poset* je čiastočne usporiadaná množina X s najväčším prvkom 1_X, najmenším prvkom 0_X, a čiastočnou operáciou *rozdiel* tak, že *rozdiel* $a \ominus b$ je definovaný práve vtedy, keď $b \leq a$, a súčasne platí:

(D1) $a \ominus 0_X = a$ pre každé $a \in X$;

(D2) Ak $c \leq b \leq a$, tak $a \ominus b \leq a \ominus c$ a $(a \ominus c) \ominus (a \ominus b) = b \ominus c$.

R. Frič a M. Papčo navrhli vybudovať zovšeobecnenú teóriu pravdepodobnosti pomocou špeciálneho typu D-posetov, a to D-posetov fuzzy množín ([21], [53]).

Definícia 17. Systém $\mathcal{X} \subseteq I^X$, ktorý obsahuje maximálny prvok 1_X a minimálny prvok 0_X, s bodovo definovaným čiastočným usporiadaním a s bodovo definovanou čiastočnou operáciou rozdielu $u \ominus v = u - v$ pre $u,\ v \in \mathcal{X}$, $v \leq u$, sa nazýva *D-poset fuzzy množín.*

Predpokladá sa, že každý D-poset fuzzy množín $\mathcal{X}$ je *redukovaný*, t. j., ak $x, y \in X$, $x \neq y$, tak existuje $u \in \mathcal{X}$ tak, že $u(x) \neq u(y)$.

Dôležitý pojem, ktorí využívajú je aj D-homomorfizmus.

Definícia 18. Nech $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ sú D-posety a nech f je zobrazenie $\mathcal{X}$ do $\mathcal{Y}$, ktoré zachováva čiastočné usporiadanie, maximálne a minimálne prvky a čiastočnú operáciu *rozdielu.* Potom f sa nazýva *D-homomorfizmus.*

Redukované D-posety fuzzy podmnožín univerza ako objekty a sekvenčne spojité D-homomorfizmy ako morfizmy tvoria kategóriu, ktorú R. Frič a M. Papčo označujú $\mathbb{ID}$. Objekty kategórie $\mathbb{ID}$ sú podobjektmi mocniny I^X.

V ďalšom texte budem pracovať s pojmom *bold algebra*. Je to algebra fuzzy podmnožín, obsahujúca maximálny prvok, uzavretá na fuzzy doplnok a uzavretá na Łukasiewiczov súčet $u \oplus v = min\{u + v, 1\}$. Intuitívne, je to vlastne ID-poset, ktorý je uzavretý na Łukasiewiczov súčet. Každá bold algebra $\mathcal{X} \subseteq [0,1]^X$ je zväzom, kde pre $u, v \in \mathcal{X}$ máme $(u \vee v)(x) = u(x) \vee v(x)$ a $(u \wedge v)(x) = u(x) \wedge v(x)$, $x \in X$. Ak je bold algebra $\mathcal{X} \subseteq [0,1]^X$ vzhľadom na bodovú sekvenčnú konvergenciu sekvenčne uzavretá v $[0,1]^X$, potom $\mathcal{X}$ je *Łukasiewiczov klan*. Potom $\mathcal{X}$ je uzatvorená aj na spočítateľné Łukasiawiczove sumy (pozri [19]). Nech $\mathcal{X} \subseteq [0,1]^X$ je bold algebra. Potom najmenšia sekvenčne uzatvorená podmnožina $[0,1]^X$ obsahujúca $\mathcal{X}$ je Łukasiewiczov klan. Je to prienik všetkých Łukasiewiczových klanov $\mathcal{Y}$ takých, že $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} \subseteq [0,1]^X$.

V článku [30] autori sumarizujú nasledovné POZOROVANIA:

1. ID-posety poskytujú minimálny model náhodných udalostí: istú a nemožnú udalosť, komplement. Ďalej, bold algebry modelujú disjunkciu a konjukciu, pričom Łukasiewiczove klany modelujú uzatvorenosť vzhľadom na limity (stochastika je o limitných vlastnostiach).

2. Významnou vlastnosťou Łukasiewiczových klanov je, že umožňujú modelovať „deliteľnosť“ náhodných udalostí. Ak $u \in \mathcal{X}$, tak pre každé prirodzené číslo n platí $u/n \in \mathcal{X}$ a ďalej, vzhľadom na sekvenčnú uzavretosť $\mathcal{X}$, aj pre každé $c \in [0,1]$ platí $c.u/ \in \mathcal{X}$. Nech $\mathcal{X} \subseteq [0,1]\ ^X$ je Łukasiewiczov klan. Potom existuje jediné σ-pole $\mathbf{A}$ podmnožín X také, že (identifikujúc množiny a ich indikátorové funkcie) $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}(\mathbf{A})$, kde $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ je množina všetkých $\mathbf{A}$-merateľných funkcií do [0,1]. Ďalej, ak $\mathcal{X}$ obsahuje zlomky, potom $\mathcal{X} = \mathcal{M}(\mathbf{A})$. Takže „deliteľnosť“ náhodných udalostí má za následok prechod od ostrých merateľných náhodných udalostí ku všetkým merateľným fuzzy náhodným udalostiam.

3. Podstatou kategoriálneho prístupu k pravdepodobnosti je, aby používané zobrazenia boli vyjadrené ako morfizmy. To sa podarilo vhodnou voľbou objektov a morfizmov. Objektami sú Łukasiewiczove klany tvaru $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ a morfizmy sú sekvenčne spojité D-homomorfizmy.

4. L. Zadeh navrhol rozšíriť pravdepodobnostnú mieru na pravdepodobnostný integrál (integrál vzhľadom k pravdepodobnostnej miere). Je to zobrazenie $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ do [0,1], ktoré sa stane morfizmom ak [0,1] chápeme ako $\mathcal{M}(\mathbf{T})$, pričom $\mathbf{T}$ je σ-pole podmnožín jednobodovej množiny. Naviac, sekvenčne spojité D-homomorfizmy do

$\mathcal{M}(\mathbf{T})$ sú práve pravdepodobnostné integrály.

5. Klasickú náhodnú premennú zovšeobecnili na merateľné zobrazenie, pričom jej duál, vzorové zobrazenie, je sekvenčne spojitý booleovský homomorfizmus na náhodných udalostiach, a teda D-homomorfizmus. Takéto morfizmy nazvali pozorovateľnými a v kategoriálnej teórii pravdepodobnosti majú centrálnu úlohu. Pozorovateľným a ich duálnym zobrazeniam (nazývajú sa štatistické zobrazenia) sa budeme venovať v ďalšej časti dizertácie. Poznamenajme, že pojem pozorovateľná sa v klasickej teórii pravdepodobnosti nepoužíva (pozri [38], [46]).

6. Prechod od klasického pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ ku $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ autori práce [30] chápu ako minimálne zovšeobecnenie klasickej teórie pravdepodobnosti na teóriu v rámci teórie kategórií.

3 Pravdepodobnostný integrál

Jedným z cieľov mojej dizertačnej práce je ukázať, prečo je Zadehov pravdepodobnostný integrál vhodným a prirodzeným rozšírením pravdepodobnostnej miery. Tento cieľ bol dosiahnutý v mojom článku *Probability integral as a linearization* (pozri [2]), ktorý sa zaoberá pravdepodobnostnou mierou a pravdepodobnostným integrálom poňatým ako aditívna linearizácia náhodných udalostí. V tejto kapitole priblížim dôležité výsledky, ktoré boli publikované v menovanom článku. Kópia článku je uvedená na konci práce ako jedna z príloh.

V teórii zovšeobecnenej pravdepodobnosti pracujeme so zovšeobecnenými náhodnými udalosti $\mathcal{M}(\mathbf{A})$, t. j. množinou všetkých merateľných funkcií do intervalu [0,1], tak ako to navrhol L. Zadeh. V článku hľadáme odpoveď na otázku, prečo je vhodné definovať pravdepodobnosť takých udalostí ako $\int(.)\mathrm{d}p$, t. j. pravdepodobnostný integrál vzhľadom k miere p. Toto modelovanie navrhol L. Zadeh, ale, ako upozornil M. Navara, nezdôvodnil prečo práve takto.

Napriek tomu bol tento návrh prijatý a zovšeobecnený a viacerí autori na jeho základe dosiahli zaujímavé výsledky v teórii kvantových štruktúr. Okrem modelovania kvantových fenoménov pomocou Hilbertových priestorov, rozvinula sa aj *algebrická* teória kvantových štruktúr (napr. [14], [18], [48], [51], [58], [59], [60]). Ukázalo sa, že fuzzy množiny umožňujú modelovať niektoré kvantové fenomény. Viacerí autori hľadali vhodné zovšeobecnenia Booleovej algebry, ktoré by modelovali vlastnosti neklasických náhodných udalostí. V literatúre je veľa algebrických štruktúr (napr. MV-algebry, efektové algebry, D-posety, kvantové logiky), ktoré modelujú pravdepodobnostné deje a javy kvantového i fuzzy charakteru. Pre moju prácu je najdôležitejšie spomenúť D-posety, ktoré zaviedli F. Kôpka a F. Chovanec v článku [41] a aj spolu s inými autormi dosiahli významné výsledky pri ich ďalšom skúmaní (pozri [9], [11], [23], [40]).

Z hľadiska metodického prístupu dizertačná práca aj môj článok vychádzajú zo skúseností predchodcov v tejto oblasti bádania. Oni modelujú zovšeobecnené náhodné udalosti pomocou štruktúry D-posetov fuzzy množín, ale tu bude kľúčová štruktúra A-posetov, ktorú zaviedol V. Skřivánek (pozri [60]). V práci budú reformulované výsledky dosiahnuté R. Fričom a M. Papčom v jazyku D-posetov do jazyka A-posetov a takisto nové tvrdenia budú formulované už v jazyku A-posetov. V článku [60] možno nájsť zavedenie A-posetov ako aj základy teórie zovšeobecnenej pravdepodobnosti v jazyku A-posetov, na ktorých ja vo svojej práci staviam a nadväzujem a budujem túto teóriu ďalej.

Prepis pojmov, viet a konštrukcií vybudovaných R. Fričom a M. Papčom do jazyka A-posetov je pomerne elementárny, ale sú aj situácie, v ktorých je použitie A-posetov užitočné a transparentnejšie.

V práci budú opísané, vysvetlené a dokázané nasledujúce tézy.

- Existuje minimálna kategória $\mathbb{ELIA}$, v ktorej možno popísať prechod od teórie klasickej ku zovšeobecnenej pravdepodobnosti.
- Klasický pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a fuzzy pravdepodobný priestor $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ sú modelmi teórie pravdepodobnosti, ktorých základné pojmy je možné definovať vo vnútri kategórie $\mathbb{ELIA}$.
- V tejto kategórii sú σ-algebry udalostí $\mathbf{A}$ a merateľné fuzzy udalosti $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ objektmi.
- Pravdepodobnostné miery a zovšeobecnené pravdepodobnostné miery (pravdepodobnostné integrály) sú morfizmami.
- Pravdepodobnostná miera aj pravdepodobnostný integrál sú „linearizácie“ náhodných udalostí charakterizované fundamentálnou vlastnosťou pravdepodobnosti – aditivitou, pričom „linearizácia“ pomáha robiť rozhodnutia.

- $\mathbf{A}$ a $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ majú iniciálnu štruktúru vzhľadom na pravdepodobnostné miery a pravdepodobnostné integrály.
- $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ je *minimálnym* kategoriálnym rozšírením $(\Omega, \mathbf{A}, p)$, pričom rozšírenie je charakterizované ako kategoriálna epireflexia.
- Pomocou epireflexie každému základnému pojmu z klasickej teórie pravdepodobnosti korešponduje jeho fuzzyfikovaný pojem v epireflektívnej podkategórii $\mathbb{FELIA}$.
- V kategórii $\mathbb{FELIA}$ je možné definovať kanonickým spôsobom asymetrickú stochastickú závislosť a nezávislosť a podmienenú pravdepodobnosť, ktorej špeciálnym prípadom je klasická stochastická závislosť a nezávislosť a podmienená pravdepodobnosť.

3.1 Linearizácia náhodných udalostí

Pravdepodobnosť je vlastne kvantifikácia náhodných udalostí číslami z intervalu [0,1]. Takáto kvantifikácia budúcich udalostí indukuje lineárne predusporiadanie na udalostiach, čo pomáha rozhodovať sa. Pravdepodobnostnú mieru teda možno chápať ako prostriedok linearizácie systému náhodných udalostí. Pravdepodobnostná miera je aditívna a sekvenčne spojitá. Pravdepodobnostný integrál $\int(.)\mathrm{d}p$ charakterizujeme ako prirodzené rozšírenie pravdepodobnosti chápanej ako lineárizácia.

V článku je dokázané, že Zadehov model je prirodzeným rozšírením pravdepobnosti chápanej ako lineárizácia, pričom zo všetkých možných *linearizácií* náhodných udalostí, pravdepodobnostné integrály sú práve aditívne linearizácie (pozri dôsledok 1).

Lebesgueova veta o dominovanej konvergencii implikuje, že každý pravdepodobnostný integrál $\int(.)\mathrm{d}p$ na $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ (teda aj každá pravdepodobnostná miera p na $\mathbf{A}$) je sekvenčne spojitý. Teda σ-aditivita normalizovanej aditívnej miery je ekvivalentná sekvenčnej spojitosti. Z toho dôvodu pracujeme so sekvenčne spojitou linearizáciou:

Definícia 19. Nech $L : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow [0,1]$ je sekvenčne spojité zobrazenie, ktoré zachováva usporiadanie, najväčší a najmenší prvok. Potom sa L nazýva *linerizáciou* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$. Ak pre $\forall\, u, v \in \mathcal{M}(\mathbf{A}), u(\omega)+v(\omega) \leq 1, \omega \in \Omega$, platí $L(u+v) = L(u)+L(v)$, tak L sa nazýva *aditívnou linearizáciou* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$.

3.2 A-posety

Fuzzyfikovaná teória pravdepodobnosti podľa R. Friča a M. Papča, ako bola opísaná v podkapitole 2.3, je založená na kategórií ID-posetov – používa jazyk čiastočného usporiadania a rozdielu, ale fuzzy udalosti sú modelované bold algebrami a łukasiewiczovskými operáciami (zovšeobecnenia booleovskej disjunkcie, negácie a konjukcie). Z historického a logického hľadiska je teda lepšie využívať operáciu čiastočného súčtu a nie rozdielu. Hoci parciálna diferencia na aditivitu stačí, na prechod ku logickým spojkám bolo potrebné „počítať“. Vhodná je operácia, ktorá priamo modeluje zovšeobecnenú *disjunktnú disjunkciu* G. Boola ([4]). Ako prostriedok na riešenie uvedených problémov zaviedol V. Skřivánek v [60] pojem A-posetu:

Definícia 20. *A-poset* je systém $(S, \leq, 0, 1, \oplus)$ obsahujúci čiastočne usporiadanú množinu S s najväčším prvkom 1 a najmenším prvkom 0 a čiastočnú binárnu operáciu $\oplus$, pre ktorú platí:

(A_1) Ak $a \oplus b$ je definované, tak je definované $b \oplus a$, pričom $a \oplus b = b \oplus a$;

(A_2) Ak $(a \oplus b) \oplus c$ je definované, tak je definované $a \oplus (b \oplus c)$, pričom $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;

(A_3) Pre každé $a \in S$ existuje práve jedno $a^c \in S$ tak, že $a \oplus a^c = 1$;

(A_4) Ak $a \oplus b$ je definované, $a_1 \leq a$ a $b_1 \leq b$, tak je definované $a_1 \oplus b_1$, pričom $a_1 \oplus b_1 \leq a \oplus b$.

Všimnime si, že $a \oplus 0 = a$ a (A_4) je ekvivalentné tvrdeniu: $a \oplus b$ je definované práve vtedy a len vtedy, keď $a \leq b^c$.

Ako je zvykom, $(S, \leq, 0, 1, \oplus)$ bude ďalej označované len ako S.

Ide o kvantovú štruktúru, ktorá je izomorfná s D-posetom a efektovou algebrou. A-poset bol po zavedení jeho autorom následne využitý na budovanie jednej z teórií zovšeobecnenej pravdepodobnosti. Práve z jeho výsledkov ako východiska čerpá aj moja práca.

Definícia 21. Nech S_1 a S_2 sú A-posety. Zobrazenie $h : S_1 \longrightarrow S_2$ nazýva *A-homomorfizmom* vtedy, keď zachováva čiastočné usporiadanie, konštanty 0 a 1 a operáciu $\oplus$.

Príklad 1. Nech $\mathbf{A}$ je pole podmnožín Ω. Potom $\mathbf{A}$ môže byť považované za A-poset, pretože:

(i) $\mathbf{A}$ je čiastočne usporiadané prostredníctvom klasickej inklúzie množín;

(ii) $\emptyset$ a Ω je najmenším, resp. najväčším prvkom;

(iii) Pre $A \in \mathbf{A}$ definujme $A^c = \Omega \setminus A$;

(iv) Pre $A, B \in \mathbf{A}$ definujme $A \oplus B = a\ \cup B$ práve ak $A \cap B = \emptyset$.

Požiadavky $(A_1) - (A_4)$ sú zjavne splnené.

Príklad 2. Nech $\mathcal{X} \subseteq [0,1]^\Omega$ je systém funkcií z Ω do $[0,1]$ taký, že konštantné funkcie $0_\Omega, 1_\Omega$ patria do $\mathcal{X}$ a ak $u \in \mathcal{X}$, tak $1_\Omega - u \in \mathcal{X}$, ak $u, v \in \mathcal{X}$ a $v \leq 1_\Omega - u$, tak $u + v \in \mathcal{X}$.

(i) Pre $u \in \mathcal{X}$ definujme $u^c = 1_\Omega - u$;

(ii) Pre $u, v \in \mathcal{X}, v \leq 1_\Omega - u$, definujme $u \oplus v = u + v$.

Potom $\mathcal{X}$ spolu s bodovým čiastočným usporiadaním je A-posetom.

Nech $\mathbf{A}$ je σ-pole podmnožín Ω. Označme $s(\mathbf{A})$ jednoduché funkcie v $\mathcal{M}(\mathbf{A})$, t. j. funkcie v tvare $\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$, kde $c_i \in [0,1]$, $A_1, A_2, ..., A_n$ je rozklad Ω a n je prirodzené číslo. Potom $s(\mathbf{A})$ a $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ (teda tiež $[0,1]$ vnímané ako $\mathcal{M}(\mathbf{T})$) môžu byť považované za A-posety. Označme e_1 vnorenie $\mathbf{A}$ do $s(\mathbf{A})$ a označme e_2 vnorenie $s(\mathbf{A})$ do $\mathcal{M}(\mathbf{A})$. Zjavne, e_1, e_2, a ich zloženie $e_2 \circ e_1$ sú A-homomorfizmy.

V ďalšom je zloženie $e_2 \circ e_1$ označované ako id. Je jasné, že A-homomorfizmy e_1, e_2 a zloženie id $= e_2 \circ e_1$ sú sekvenčne spojité vzhľadom na bodovú konvergenciu funkcií.

Lema 1. *Nech* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *sú polia podmnožín* Ω*, resp.* Ξ*. a nech* h *je A-homomorfizmus* $\mathbf{B}$ *do* $\mathbf{A}$*. Potom* h *je booleovský homomorfizmus.*

Dôkaz. Zjavne, $h(\Xi) = \Omega$ a $h(\emptyset) = \emptyset$. Nech $B_1, B_2 \in \mathbf{B}$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Potom $h(B_1 \cup B_2) = h(B_1 \oplus B_2) = h(B_1) \oplus h(B_2) = h(B_1) \cup h(B_2)$ a $h(B_1) \cap h(B_2) = \emptyset$. Preto pre $B \in \mathbf{B}$ platí $h(B \cup (\Xi \setminus B)) = \Omega = h(B) \cup h(\Xi \setminus B)$, odkiaľ $h(B) \cap h(\Xi \setminus B) = \emptyset$ a teda $h(B^c) = h(B)^c$. Nech $B_1, B_2 \in \mathbf{B}$. Potom množina $B_1 \cup B_2$ je zjednotením troch disjunktných množín $B_1 \setminus B_2$, $B_1 \cap B_2$ a $B_2 \setminus B_1$. Ďalej $h(B_1)$ je disjunktným zjednotením množín $h(B_1) \setminus h(B_1 \cap B_2)$ a $h(B_1 \cap B_2)$. Tiež $h(B_2)$ je disjunktným zjednotením $h(B_2) \setminus h(B_1 \cap B_2)$ a $h(B_1 \cap B_2)$. Teda h zachováva zjednotenie dvoch množín. Z De Morganových pravidiel vyplýva, že h zachováva tiež prienik dvoch množín. Čiže h je booleovský homomorfizmus. □

Nech $\mathbb{A}$ označuje kategóriu, ktorej objektmi sú A-posety a morfizmami sú A-homomorfizmy.

Lema 2. *Kategória $\mathbb{A}$ má súčiny.*

Dôkaz. Nech A_1 a A_2 sú A-posety. Nech A je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a_1, a_2), $a_i \in A_i$, $i = 1, 2$. Definujme projekcie $\mathrm{pr}_i : A \longrightarrow A_i$, $i = 1, 2$, zvyčajným spôsobom: $\mathrm{pr}_1(a_1, a_2) = a_1$ a $\mathrm{pr}_2(a_1, a_2) = a_2$. Definujme štruktúru A-posetu A bodovo. Je zjavné, že A spolu s projekciami $\mathrm{pr}_i, i = 1, 2$, je kategoriálny súčin A_1 a A_2. Súčin indexovanej množiny A-posetov sa dá konštruovať analogicky. □

3.3 Algebrické vlastnosti náhodných udalostí

Ambíciou tejto podkapitoly je priblížiť, z akého hľadiska a prečo sú práve množiny všetkých merateľných funkcií $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ vnímané ako A-posety vhodným rozšírením polí množín $\mathbf{A}$. Na pretrase budú algebrické a logické dôvody.

Algebrické dôvody – vlastnosti systému udalostí:

Nech $\mathbf{A}$ je σ-pole podmnožín Ω. Potom je $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ najmenšia zo všetkých podmnožín $\mathcal{X} \subseteq [0, 1]^{\Omega}$ obsahujúca $\mathbf{A}$ (indikátorové funkcie množín v $\mathbf{A}$) a uzavretá na doplnky (ak $u \in \mathcal{X}$, tak $(1_{\Omega} \ - u) \in \mathcal{X}$), bodové supréma a infimá, bodové sekvenčné limity a deliteľná ($(1/n)_{\Omega} \in \mathcal{X}, n \in N^{+}$).

Logické dôvody:

Booleova logika môže byť rozšírená na fuzzy udalosti viacerými spôsobmi, špeciálne môžeme použiť Łukasiewiczovu logiku. D. Mundici píše v [49], že zo všetkých spojitých t-noriem, Łukasiewiczova konjukcia je jediné rozšírenie Booleovej logiky so spojitou implikáciou.

Nech $\mathbf{T} = \{\emptyset, \Omega\}$ je triviálne pole množín. Potom $\mathcal{M}(\mathbf{T}) \equiv [0, 1]$. Teda definičný obor $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ a obor hodnôt pravdepodobnostného integrálu sú tej istej matematickej podstaty.

V [60] R. Frič a V. Skřivánek zaviedli fuzzyfikovanú pravdepodobnosť na IA-posetoch funkcií. Výsledné zovšeobecnené náhodné udalosti tvoria pravdepodobnostnú doménu (napr. [26], [27], [28]) kogenerovanú uzatvoreným jednotkovým intervalom $I = [0, 1]$, považovaným za A-poset. Takéto pravdepodobnostné domény sú analogické ID-posetom (napr. [52], [53], [26]), ale narozdiel od čiastočnej operácie rozdielu $\ominus$ v ID-posetoch $\mathcal{X} \subseteq I^X$, čiastočná operácia súčtu $\oplus$ má zjavnú logickú interpretáciu: „disjunkcia disjunktných fuzzy udalostí“.

Definícia 22. A-poset funkcií, ktorých hodnoty sú z intervalu $[0, 1]$, sa nazýva *IA-poset.*

Definícia 23. Sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z IA-posetu $\mathcal{X} \subseteq [0, 1]^X$ do $[0, 1]$ sa nazýva *stav.* Sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z IA-posetu $\mathcal{X} \subseteq [0, 1]^X$ do IA-posetu $\mathcal{Y} \subseteq [0, 1]^Y$ sa nazýva *pozorovateľná.*

Definícia 24. *Łukasiewiczov klan* je systém $\mathcal{X} \subseteq [0, 1]^\Omega$ uzavretý na bodové sekvenčné limity, obsahujúci konštantné funkcie 0_Ω, 1_Ω a uzavretý na zvyčajné Łukasiewiczove operácie disjunkcie, konjukcie, negácie, ktoré definujeme bodovo, t. j. pre $u, v \in \mathcal{X}$ a $\omega \in \Omega$ platí

- $(u \oplus v)(\omega) = u(\omega) \oplus v(\omega) = \min\{1, u(\omega) + v(\omega)\}$;
- $(u \odot v)(\omega) = u(\omega) \odot v(\omega) = \max\{0, u(\omega) + v(\omega) - 1\}$;
- $u^*(\omega) = 1 - u(\omega)$.

Každé σ-pole $\mathbf{A}$ a korešpondujúce merateľné funkcie $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ sú kánonické príklady Łukasiewiczových klanov.

Ako bolo poznamenané v [30], deliteľnosť $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ je podstatnou črtou fuzzyfikovanej teórie pravdepodobnosti.

Nech $\mathcal{X} \subseteq [0, 1]^\Omega$ je Łukasiewiczov klan. Potom existuje práve jedno σ-pole $\mathbf{A}_\mathcal{X}$ podmnožín Ω také, že $\mathbf{A}_\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}(\mathbf{A}_\mathcal{X})$. Ďalej, $\mathcal{X} = \mathcal{M}(\mathbf{A}_\mathcal{X})$ práve, ak $\mathcal{X}$ obsahuje všetky konštantné funkcie r_Ω, $r \in [0, 1]$ (podľa [8], [59]).

Łukasiewiczove klany v tvare $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ nazývame **plné**. Dva Łukasiewicove klany $\mathcal{X} \subseteq [0, 1]^\Omega$ a $\mathcal{Y} \subseteq [0, 1]^\Omega$ definujeme ako ekvivalentné, keď platí $\mathbf{A}_\mathcal{X} = \mathbf{A}_\mathcal{Y}$.

Zjavne, $\mathbf{A}_\mathcal{X}$ a $\mathcal{M}(\mathbf{A}_\mathcal{X})$ sú ekvivalentné. Ďalej, $\mathbf{A}_\mathcal{X}$ a $\mathcal{M}(\mathbf{A}_\mathcal{X})$ sú **extremálne**, $\mathbf{A}_\mathcal{X}$ je najmenší prvok a $\mathcal{M}(\mathbf{A}_\mathcal{X})$ je najväčší prvok v príslušnej triede ekvivalencie.

Ak stotožníme množinu $A \subseteq \Omega$ a jej indikátorovú funkciu $\chi_A \in \{0,1\}^\Omega$ ($\chi_A(\omega) = 1$ pre $\omega \in A$ a $\chi_A(\omega) = 0$ pre $\omega \in A^c$), tak χ_A považujeme za výrokovú funkciu „ω patrí do A“.

Poznamenajme, že G. Boole používal „disjunktné zjednotenie“, nezaviedol Booleovu algebru, to bolo urobené neskôr (pozri [4]), teda A-posety fuzzy množín sú prirodzenou fuzzyfikáciou pôvodnej Booleovej myšlienky.

Vlastnosti IA-posetov nám umožňujú kategoriálne zovšeobecnenie Kolmogorovej teórie pravdepodobnosti.

Označme $\mathbb{IA}$ kategóriu, v ktorej objektmi sú IA-posety a morfizmami sú sekvenčne spojité A-homomorfizmy.

Aby sme formalizovali prechod od $\mathbf{A}$ do $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ v jazyku teórie kategórií, zavedieme ešte nasledujúce podkategórie kategórie $\mathbb{IA}$:

- $\mathbb{LIA}$, v ktorej objektmi sú Łukasiewiczove klany,
- $\mathbb{ELIA}$, v ktorej objektmi sú extremálne Łukasiewiczove klany (najmenšie a najväčšie prvky v triedach ekvivalencií),
- $\mathbb{FELIA}$, v ktorej objektmi sú plné Łukasiewiczove klany.

Pri takto definovaných podkategóriach platia dôležité tvrdenia:

- Základné pojmy klasickej teórie pravdepodobnosti ako náhodné udalosti a booleovské logické operácie, náhodné premenné, pozorovateľné a pravdepodobnostné miery, môžu byť definované vo vnútri $\mathbb{ELIA}$.
- Skrze epireflexiu každému klasickému pojmu prislúcha jeho *fuzzyfikovaný* pojem vo vnútri $\mathbb{FELIA}$.
- Všetky *stochastické zobrazenia* sú vo vnútri $\mathbb{FELIA}$ morfizmami.
- Základné konštrukcie v teórii pravdepodobnosti sú kategoriálne.
- $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ má iniciálnu štruktúru A-posetu vzhľadom na stavy.

Nasledujúca lema je „categorical bookkeeping“.

Lema 3. *Nech pre každé t z indexovanej množiny T je $\mathcal{X}_t$ A-posetom. Nech $\mathcal{X}$ je súčinom $\mathcal{X}_t, t \in T$.*

(i) Nech každé $\mathcal{X}_t$ je objektom $\mathbb{LIA}$. Potom $\mathcal{X}$ je objektom $\mathbb{LIA}$;

(ii) Nech každé $\mathcal{X}_t$ je objektom $\mathbb{FELIA}$. Potom $\mathcal{X}$ je objektom $\mathbb{FELIA}$.

Dôkaz. (i) Každé $\mathcal{X}_t$ je Łukasiewiczovým klanom obsahujúcim funkcie z množiny Ω_t do [0,1], $t \in T$. Nech Ω je disjunktným zjednotením týchto množín. Potom každé $u \in \mathcal{X}$ je reprezentované ako funkcia z Ω do [0,1] „disjunktne zlepená“ z funkcií $\mathcal{X}_t$, $t \in T$, a $\mathcal{X}$ má bodovo štruktúru A-posetu. Čiže, $\mathcal{X}$ je objektom $\mathbb{LIA}$.

(ii) vyplýva z (i). □

3.4 Epireflexia

V [23] bolo dokázané, že kategória plných Łukasiewiczovych klanov je epireflektívnou podkategóriou kategórie bold algebier a sekvenčne spojitých D-homomorfizmov. Toto veľmi všeobecné tvrdenie bolo zložitým spôsobom dokázané pomocou techník abstraktnej analýzy (pozri [27]). Prechod od $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ ku $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ v pojmoch kategoriálnej epireflexie je dôsledkom tohto všeobecného tvrdenia. Naším ďalším cieľom je podať v jazyku A-posetov priamočiary dokaz toho, že $\mathbb{FELIA}$ je epireflektívnou podkategóriou kategórie $\mathbb{ELIA}$.

Lema 4. *Nech $\mathbf{A}$ je σ-pole podmnožín Ω, nech $p : \mathbf{A} \longrightarrow [0,1]$ je pravdepodobnostná miera a nech $\overline{p} = \int(.)\mathrm{d}p$ je príslušný pravdepodobnostný integrál na $\mathcal{M}(\mathbf{A})$. Potom*

(i) $\overline{p}$ je sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ do $\mathcal{M}(\mathbf{T})$;

(ii) p je sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z $\mathbf{A}$ do $\mathcal{M}(\mathbf{T})$.

Dôkaz. (i) S intervalom $[0,1]$ môžeme pracovať ako s $\mathcal{M}(\mathbf{T})$. Na základe Lebesgueovej vety o dominantnej konvergencii $\overline{p}$ je sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ do $\mathcal{M}(\mathbf{T})$. Pretože každý pravdepodobnostný integrál, ako zobrazenie $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ do $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ zachovávava usporiadanie, konštanty a operáciu „súčtu“, ide o A-homomorfizmus. Platí teda tvrdenie (i).

(ii) Keďže p je zúženie $\overline{p}$ na A-poset $\mathbf{A}$, (ii) vyplýva z (i). □

Predchádzajúce tvrdenie znázorňuje diagram na obr. 3.

Lema 5. *Nech $\mathbf{A}$ je σ-pole podmnožín Ω a nech h je sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z $\mathbf{A}$ do $\mathcal{M}(\mathbf{T})$. Potom h je pravdepodobnostná miera.*

Dôkaz. Nech je h zobrazenie z $\mathbf{A}$ do [0,1]. Zrejme $h(\emptyset) = 0$, $h(\Omega) = 1$ a $h(A \cup B) = h(A) + h(B)$ vždy, keď $A \cap B = \emptyset$. Zo sekvenčnej spojitosti h vyplýva, že h je σ-aditívne a teda je to pravdepodobnostná miera na $\mathbf{A}$. □

Dôležitým záverom je to, že pravdepodobnostné miery sú práve sekvenčne spojité A-homomorfizmy zo σ-polí množín do $\mathcal{M}(\mathbf{T})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, "h\equiv p"] \arrow[d, hook] \arrow[r, phantom, "\#"] & & \mathcal{M}(\mathbf{T}) \equiv [0,1] \\
\mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[urr, "\int(.)\mathrm{d}p"'] & &
\end{tikzcd}$$

Obr. 3

Lema 6. *Nech* $\mathbf{A}$ *je pole podmnožín* Ω *a nech* $\mathbf{B}$ *je pole podmnožín* Ξ.

(i) Nech g *a* h *sú sekvenčne spojité A-homomorfizmy z* $s(\mathbf{A})$ *do* $\mathcal{M}(\mathbf{B})$. *Ak* $g(A) = h(A)$ *pre všetky* $A \in \mathbf{A}$, *potom* $g = h$.

(ii) Nech g *a* h *sú sekvenčne spojité A-homomorfizmy z* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *do* $\mathcal{M}(\mathbf{B})$. *Ak* $g(A) = f(A)$ *pre všetky* $A \in \mathbf{A}$, *potom* $g = h$.

(iii) Sekvenčne spojitý A-homomorfizmus $\mathrm{id} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ *je epimorfizmus.*

Dôkaz. (i) Nech l je prirodzené číslo. Potom pre každé prirodzené číslo $k, k \leq l$, a každé $A \in \mathbf{A}$ je $g((k/l)\chi_A) = (k/l)g(\chi_A) = (k/l)h(\chi_A) = h((k/l)\chi_A)$. Zrejme h a g sú zhodné na všetkých $\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i} \in s(\mathbf{A})$, kde $c_i, i = 1, 2, ..., n$, sú racionálne čísla z [0,1]. Zo sekvenčnej spojitosti h a g vyplýva, že $g = h$.

(ii) Z (i) vyplýva, že g a h sa zhodujú na $s(\mathbf{A})$. Tvrdenie vyplýva z toho, že každá $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je limitou postupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $u_n \in s(\mathbf{A})$ a $g(u_n) = h(u_n)$. g a h sú sekvenčne spojité a teda $g(u) = \lim_{n\to\infty} g(u_n) = \lim_{n\to\infty} h(u_n) = h(u)$.

(iii) Nech g a h sú také sekvenčne spojité A-homomorfizmy z $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ do $\mathcal{M}(\mathbf{B})$, že $g(A) = f(A)$ pre všetky $A \in \mathbf{A}$. Potom $g \circ \mathrm{id} = h \circ \mathrm{id}$. Je potrebné overiť, že $g = h$. To ale vyplýva z (ii). □

Lema 7. *Nech* $\mathbf{A}$ *je* σ*-pole podmnožín* Ω *a nech* h *je sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z* $\mathbf{A}$ *do* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$. *Potom existuje práve jeden sekvenčne spojitý A-homomorfizmus* h_s *z* $s(\mathbf{A})$ *do* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ *rozširujúci* h *na* $s(\mathbf{A})$.

Dôkaz. Podľa lemy 5, h je pravdepodobnostná miera na $\mathbf{A}$. Nech $\overline{h} = \int(.)\mathrm{d}h$ označuje korešpondujúci pravdepodobnostný integrál na $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ a označme h_s zúženie $\overline{h}$ na $s(\mathbf{A})$. Z lemy 4 vyplýva, že $\overline{h}$ je sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ do $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ a teda h_s je sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z $s(\mathbf{A})$ do $\mathcal{M}(\mathbf{T})$, ktorý je rozšírením h. Podľa lemy 6 je h_s jednoznačne určené. □

Lema 8. *Nech* $\mathbf{A}$ *je* σ*-pole podmnožín* Ω *a nech* h_s *je sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z* $s(\mathbf{A})$ *into* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$*. Potom existuje jediný sekvenčne spojitý A-homomorfizmus* h_m *z* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *do* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ *rozširujúci* h_s *na* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$*.*

Dôkaz. Z lemy 7 vyplýva, že existuje jediná pravdepodobnostná miera h na $\mathbf{A}$ taká, že h_s je zúžením pravdepodobnostného integrálu $\int(.)\mathrm{d}h$ z $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ na $s(\mathbf{A})$. Stačí položiť $h_m = \int(.)\mathrm{d}h$. Podľa lemy 6 je h_m jednoznačne určený. □

Nasledujúca veta hovorí o rozširovaní pravdepodobnostnej miery a znázorňuje ju komutatívny diagram na obr. 4.

Veta 2. *Nech* $\mathbf{A}$ *je* σ*-pole podmnožín* Ω *a nech* h *je sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z* $\mathbf{A}$ *do* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$*. Potom existuje práve jeden sekvenčne spojitý A-homomorfizmus* h_m *z* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *do* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$*, ktorý rozširuje* h *na* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$*.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\#" near start] & \mathcal{M}(\mathbf{T}) \equiv [0,1] \\
\mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[ur, dashed, "\exists ! h_m"'] &
\end{tikzcd}$$

Obr. 4

Dôkaz. Z predchádzajúcich lem vyplýva, že h je pravdepodobnostná miera na $\mathbf{A}$ a h_m je pravdepodobnostným integrálom $\overline{h} = \int(.)\mathrm{d}h$ na $\mathcal{M}(\mathbf{A})$, ktorý je jednoznačne určený. □

Dôsledok 1. *Nech* $\mathbf{A}$ *je* σ*-pole množín a nech* L *je zobrazenie z* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *do* $[0,1]$*. Potom sú tieto tvrdenia ekvivalentné:*

(i) L *je aditívna linearizácia.*

(ii) Existuje práve jedna taká pravdepodobnostná miera p *na* $\mathbf{A}$*, že* $L = \int(.)\mathrm{d}p$*.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "h"] & \mathcal{M}(\mathbf{B}) \arrow[r, "e"] & {[0,1]^{\Xi}} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\xi}"] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, "p_{\xi}=\mathrm{pr}_{\xi}\circ e\circ h"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, phantom, "\#"] & & {[0,1]} \\
\mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[rru, dashed, "\exists!\,\overline{p_{\xi}}"'] & & \forall\xi\in\Xi
\end{tikzcd}$$

Obr. 5

Veta 3. *Nech* $\mathbf{A}$ *je pole podmnožín* Ω *a nech* $\mathbf{B}$ *je pole podmnožín* Ξ*. Nech* h *je sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z* $\mathbf{A}$ *do* $\mathcal{M}(\mathbf{B})$*. Potom existuje práve jeden sekvenčne spojitý A-homomorfizmus* h_m *z* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *do* $\mathcal{M}(\mathbf{B})$*, ktorý rozširuje* h *na* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$*.*

Dôkaz. Nech $[0,1]^{\Xi}$ je kategoriálnou mocninou $[0,1] = \mathcal{M}(\mathbf{T})$, nech $\mathrm{pr}_{\xi}, \xi \in \Xi$, je projekciou $[0,1]^{\Xi}$ do ξ-tého faktora, nech e je vnorenie $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ do $[0,1]^{\Xi}$ a nech id je vnorenie $\mathbf{A}$ do $\mathcal{M}(\mathbf{A})$. Potom zloženie $p_{\xi} = \mathrm{pr}_{\xi} \circ e \circ h$ je pravdepodobnostnou mierou na $\mathbf{A}$ a podľa vety 2 p_{ξ} môže byť jednoznačne rozšírená na sekvenčne spojitý A-homomorfizmus $\overline{p_{\xi}}$ na $\mathcal{M}(\mathbf{A})$, pozri obr. 5. Keďže $[0,1]^{\Xi}$ je kategoriálnou mocninou [0,1], existuje jediný sekvenčne spojitý A-homomorfizmus h_{Ξ} z $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ do $[0,1]^{\Xi}$ taký, že pre každé $\xi \in \Xi$ diagram na obr. 6 komutuje. Teraz stačí dokázať, že pre každé $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ platí $h_{\Xi}(u) \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$. To poskytne žiadané jednoznačné rozšírenie $h_m : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$, pozri obr. 7.

Nech $A \in \mathbf{A}$. Pre všetky $\xi \in \Xi$ platí $\overline{p_{\xi}}(\chi_A) = \mathrm{pr}_{\xi}(h(\chi_A)) = \mathrm{pr}_{\xi}(h_{\Xi}(\chi_A))$ (pozri obr. 5), a preto $h(\chi_A) = h_{\Xi}(\chi_A)$. Takže $h_m(\chi_A) = h(\chi_A)$ a h_m je sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ do $[0,1]^{\Xi}$ taký, že $h_m(\chi_A) \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$. Nech $u = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i} \in s(\mathbf{A})$, kde všetky c_i sú racionálne čísla z [0,1]. Potom $h_m(u) = \sum_{i=1}^{n} c_i h(\chi_{A_i}) \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$ a teda $h_m(u) \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$ pre všetky $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$. Z lemy 6 vyplýva, že h_m je jednoznačne určený. $\square$

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]^{\Xi}} \arrow[rr, "\mathrm{pr}_{\xi}"] \arrow[dr, phantom, "\#"] & & {[0,1]} \\
\mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[u, dashed, "\exists!\, h_{\Xi}"'] \arrow[urr, "\overline{p_{\xi}}"'] & & \forall \xi \in \Xi
\end{tikzcd}$$

Obr. 6

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\#", near start, shift left=4] & \mathcal{M}(\mathbf{B}) \arrow[r, "e"] \arrow[dr, phantom, "\#", near start, shift right=4] & {[0,1]^{\Xi}} \\
& \mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[u, dashed, "?\, h_m"] \arrow[ur, "h_{\Xi}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, "h"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[drr, phantom, "\#"] & & \mathcal{M}(\mathbf{B}) \\
\mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[urr, dashed, "\exists! h_m"'] & & h_m(.) = h_{\Xi}(.)
\end{tikzcd}$$

Obr. 7

Dôsledok 2. *Nech* $\mathbf{A}$ *je pole podmnožín* Ω *a nech* $\mathbf{B}$ *je pole podmnožín* Ξ*. Nech* h *je sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z* $\mathbf{A}$ *do* $\mathbf{B}$*. Potom existuje jediný sekvenčne spojitý A-homomorfizmus* h_m *z* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *do* $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ *taký, že* $h(A) = h_m(A)$ *pre všetky* $A \in \mathbf{A}$.

Všetky tvrdenia vedú ku kľúčovému tvrdeniu o epireflektívnej podkategórii, ktorá je dôležitým pojmom v teórii kategórií (pozri [1]): Podkategória $\mathbb{B}$ kategórie $\mathbb{A}$ je epireflektívna v $\mathbb{A}$, ak každý objekt a z $\mathbb{A}$ môže byť „pekne vnorený“ do nejakého objektu a_B z $\mathbb{B}$ (jednoznačne určený až na izomorfizmus) a každý morfizmus $h : a \rightarrow b$, kde b je objekt z $\mathbb{B}$, môže byť jednoznačne rozšírený na jediný morfizmus $h_b : a_B \rightarrow b$.

V našom prípade základné pojmy klasickej téorie prevdepodobnosti sú *reflektované* (cez epireflektor) do ich fuzzyfikácie, pozri obr. 8.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{T} \equiv \{0,1\} \arrow[d, hook] & & \mathbf{A} \arrow[r] \arrow[ll, phantom] \arrow[dll, "p"'] \arrow[d, hook, "\#"', "\#"] \arrow[dr, "h"] & \mathbf{B} \arrow[d, hook, "\#"'] & \mathbb{ELIA} \\
\mathbb{FELIA} & \mathcal{M}(\mathbf{T}) \equiv [0,1] & & \mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[ll, "\int(.)\mathrm{d}p"'] \arrow[r, "h_m"] & \mathcal{M}(\mathbf{B}) &
\end{tikzcd}$$

Obr. 8

Veta 4. *$\mathbb{FELIA}$ je epireflektívnou podkategórie kategórie $\mathbb{ELIA}$, kde $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ je epireflexia $\mathbf{A}$, $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ je epireflexia $\mathbf{B}$, $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ je epireflexia $\mathbf{T}$, $\int(.)\mathrm{d}p$ je epireflexia p a h_m je epireflexia h.*

Dôkaz. Podľa lemy 6 sú vnorenia $\mathbf{T} \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{T})$, $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ a $\mathbf{B} \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$ epimorfizmy. Tvrdenie vyplýva z vety 3. $\square$

V kategóri $\mathbb{ELIA}$ platia dôležité závery:

- Pozorovateľné sú morfizmy v $\mathbb{ELIA}$. Každej pozorovateľnej $h : \mathbf{A} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$ zodpovedá práve jedna pozorovateľná $h_m : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$, ktorá rozširuje h, pričom klasickú pozorovateľnú z $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ možno považovať za pozorovateľnú h z $\mathbf{A}$ do $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ (cez vnorenie $\mathbf{B} \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$).
- Pravdepodobnostné miery a pravdepodobnostné integrály sú práve pozorovateľné do $\mathcal{M}(\mathbf{T})$.
- $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ je epireflexou $\mathbf{A}$ a $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ nesie iniciálnu štruktúru A-posetu vzhľadom na pravdepodobnostné integrály.
- Pravdepodobnostné integrály sú práve aditívne linearizácie náhodných udalostí.
- Prechod od $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ ku $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ je podporený kategoriálnymi argumentmi.

4 Stochastická závislosť a nezávislosť

Jedným z cieľov dizertačnej práce bolo študovať a opísať stochastickú nezávislosť a závislosť a podmienenú pravdepodobnosť v teórii zovšeobecnenej pravdepodobnosti. Veľká časť dosiahnutých výsledkov je publikovaná v článku *Real functions in stochastic dependence* (pozri [3]), ktorého som spoluautorkou s mojim školiteľom R. Fričom. Článok je ako príloha tejto práce. Najskôr sa budeme venovať motivácii a stručnému vovedeniu do problematiky článku. Výklad využíva pojmy a aparát stredoškolskej matematiky. Potom predstavíme konkrétne výsledky z článku [3], ktoré využívajú aparát abstraktnej analýzy.

4.1 Motivácia

Ako prvý axiomatizoval teóriu pravdepodobnosti A. N. Kolmogorov, pričom vlastne riešil 6. Hilbertov problém o axiomatizácii matematickej teórie fyziky. O teórii pravdepodobnosti sa hovorí, že ide o oblasť teórie miery, ktorá je venovaná špeciálnym úlohám a má v nich dôležitú úlohu nezávislosť. Kolmogorov začal s konečným pravdepodobnostným priestorom $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a pod experimentom rozumel rozklad Ω, pričom udalosťou je nejaké zjednotenie prvkov rozkladu. Ak interpretujeme pravdepodobnosť udalosti pomocou jej relatívnej početnosti, tak vlastne predpokladáme sériu rovnakých experimentov, pričom výsledky predchádzajúcich neovplyvňujú výsledky nasledujúceho. Nezávislosť experimentu E_2 na experimente E_1 chápeme tak, že výsledky exprimentu E_1 nemajú vplyv na výsledky experimentu E_2. Interpretácia pravdepodobnosti udalosti pomocou jej relatívnej početnosti umožnila formálne definovať nezávislosť takto: udalosti A a B sú nezávislé, ak $p(A \cap B) = p(A).p(B)$. Ako tomu rozumieť?

Urobíme n nezávislých opakovaní experimentu a aproximujeme pravdepodobnosť $p(A)$ udalosti A pomocou jej relatívnej početnosti n_A/n, kde n je počet opakovaní, pri ktorých nastala udalosť A. Táto interpretácia $p(A)$ viedla A. N. Kolmogorova k axiómam pravdepodobnostnej miery (normovanosť, aditivita), definícii podmienenej pravdepodobnosti a nezávislosti (pre $0 < n_B$):

$$n_{A\cap B}/n_B = (n_{A\cap B}/n)/(n_B/n) \quad ... \quad p(A \mid B) = p(A \cap B)/p(B)$$

a ďalej (pre $0 < p(B)$)

$$p(A \mid B) = p(A) \quad \Longrightarrow \quad p(A \cap B) = p(A).p(B),$$

čo viedlo A. N. Kolmogorova ku formálnej definícii (stochastickej) nezávislosti:

Experimenty E_1, E_2, ..., E_n sú vzájomne nezávislé, ak platí

$$p(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = p(A_1).p(A_2)...p(A_n),$$

pre každú n-ticu udalostí, pričom A_i je udalosť v E_i.

Udalosti A a B sú nezávislé, ak sú experimenty $\{A, A^c\}$ a $\{B, B^c\}$ nezávislé.

Dá sa dokázať, že udalosti A a B sú nezávislé práve vtedy, keď $p(A \cap B) = p(A).p(B)$.

Takto definovaná nezávislosť je symetrická. My sa pýtame: Prečo?

Zaujímavé je kategoriálne pozadie nezávislosti. Pripomeňme, že kategoriálny súčin dvoch objektov O_1 a O_2 je (ak existuje) najlepší objekt $O_1 \times O_2$ spolu s dvomi projekciami $\mathrm{pr}_1 : O_1 \times O_2 \longrightarrow O_1$ a $\mathrm{pr}_2 : O_1 \times O_2 \longrightarrow O_2$, pričom cez projekciu pr_i *vidíme* presne pôvodný objekt $O_i\,, i = 1, 2$.

Ako ilustrácia dobre poslúži spôsob, akým sa zvyčajne modeluje *združený* experiment dvoch vzájomne nezávislých experimentov hod kockou K_1 a hod kockou K_2. Modeluje sa pomocou (kategoriálneho) súčinu. Pritom $K_1 \times K_2$ a $P_{K_1} \times P_{K_2}$ je združeným modelom týchto dvoch nezávislých experimentov.

S hodom kockou súvisí známy paradox z histórie. Žoldnieri si krátili čas hrami s kockami. Tipovali, aký bude súčet bodov, ktoré padnú na dvoch kockách. (Pozri obr. 9.) Postupne si všimli, že niektoré súčty nastanú častejšie ako iné, teda pri stávke na určitý súčet majú väčšiu šancu vyhrať ako pri inom. Začali sa zaoberať tým, aká je pravdepodobnosť jednotlivých výsledkov náhodneho pokusu.

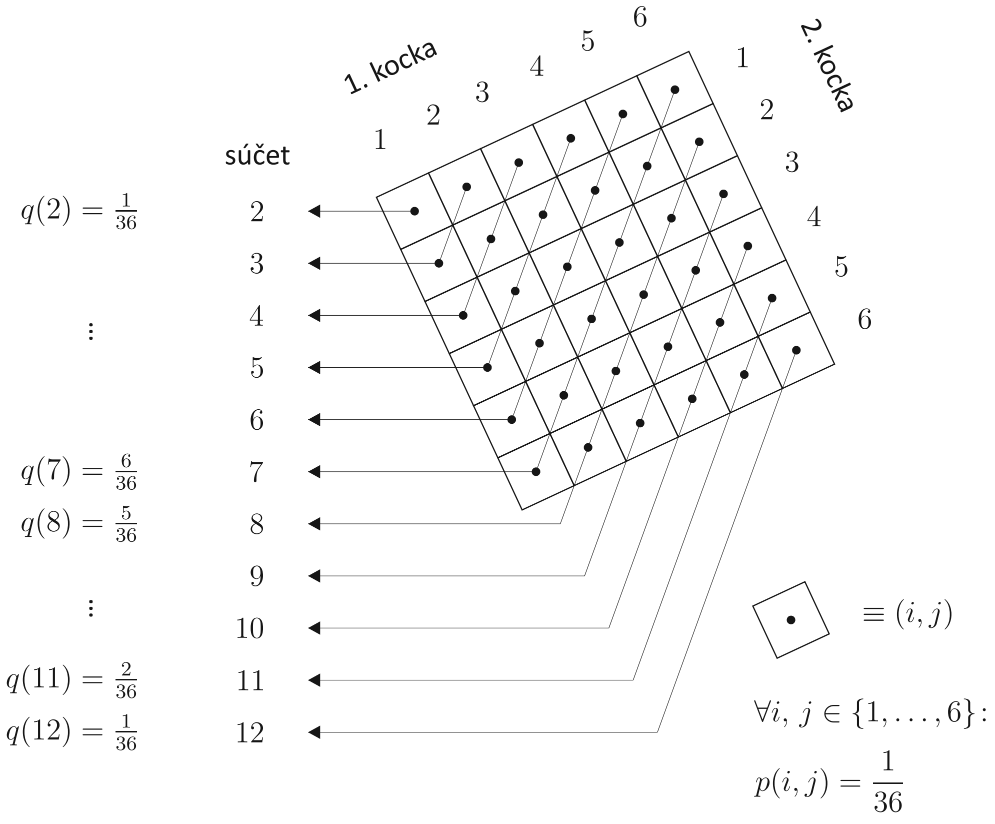
Uvažovali takto:

Súčet počtov bodiek padnutých na dvoch kockách je 7, ak nastane 1+6, 2+5, alebo 3+4;

súčet je 8, ak nastane 2+6, 3+5, alebo 4+4.

Podľa nich by pravdepodobnosť súčtov 7 a 8 mala byť rovnaká, lebo je rovnako veľa priaznivých výsledkov, ale empiricky zistili, že predsa nastáva častejšie ako 8, čo bol pre nich paradox.

Avšak v tomto prípade je potrebné uvažovať nie neusporiadané dvojice, ale usporiadané dvojice, je ich 36 a sú rovnako pravdepodobné.



Obr. 9

Tento príklad vedie ku konštrukcii náhodnej premennej, čo je akoby „otváranie čiernej skrinky“ (výberoveho priestoru). Náhodná premenná patrí ku podstate teórie pravdepodobnosti A. N. Kolmogorova. Schématicky môžeme hovoriť o „stochastickom kanáli, ktorý otvára čiernu skrinku“. Vľavo máme „súčtové“ elementárne udalosti, každej z nich zodpovedá príslušná množina priaznivých elementárnych udalostí v čiernej skrinke vpravo (výberový priestor) a pravdepodobnosť udalosti vľavo dostaneme ako pravdepodobnosť množiny priaznivých udalostí vpravo. Stochastické informácie prúdia „zľava doprava o udalostiach“ a „sprava doľava o pravdepodobnostiach“. Stochastický kanál a prúdenie informácií vedie k matematickým objektom a morfizmom (jazyk modernej matematiky, teória kategórií).

Majme dva pravdepodobnostné priestory $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$. Zobrazenie $T : \Omega \longrightarrow \Xi$ bude „užitočné“, ak prenáša stochastické informácie z $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ do $(\Xi, \mathbf{B}, q)$; T spolu s jeho vzorovým zobrazením $T^{\leftarrow}$ vytvára stochastický kanál. V klasickej teórii pravdepodobnosti tomu rozumieme takto: $q(B) = p(T^{\leftarrow}(B)) = (p \circ T^{\leftarrow})(B), B \in \mathbf{B}, q = p \circ T^{\leftarrow}$, pričom $T^{\leftarrow}(B) = \{\omega \in \Omega; T(\omega) \in B\}$ a požadujeme, aby $T^{\leftarrow}$ zobrazovalo $\mathbf{B}$ do $\mathbf{A}$, t. j., aby zobrazenie $T : \Omega \longrightarrow \Xi$ bolo merateľné.

V klasickom prípade experiment modelujeme pravdepodobnostným priestorom. Nech $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ sú pravdepodobnostné priestory a nech $T : \Omega \longrightarrow \Xi$ je merateľné zobrazenie, ktoré zachováva mieru, t. j. $q = p \circ T^{\leftarrow}$. To môžeme chápať tak, že výsledky prvého experimentu ovplyvňujú výsledky druheho experimentu. Fuzzyfikácia klasickej teórie pravdepodobnosti umožňuje modelovať nezávislý stochastický kanál a asymetrickú nezávislosť.

Ako počítanie so zlomkami a operácia delenia umožňujú riešiť istý typ rovníc, podobne rozšírenie klasickej (kolmogorovovskej) teórie pravdepodobnosti o deliteľnosť náhodných udalostí (teda fuzzy udalostí) umožňuje modelovať niektoré netradičné stochastické situácie.

Na jednoduchej diskrétnej transportnej úlohe objasníme podstatu „deliteľnej“ (t. j. zovšeobecnenej) pravdepodobnosti a naznačíme jej prínos: modelovanie kvantových a (duálne) fuzzy stochastických fenoménov. Prínosom sú aj nové poznatky o stochastickej nezávislosti a podmienenej pravdepodobnosti.

„Transportačnému problému“ sa venovali R. Frič a M. Papčo v článku [25]:

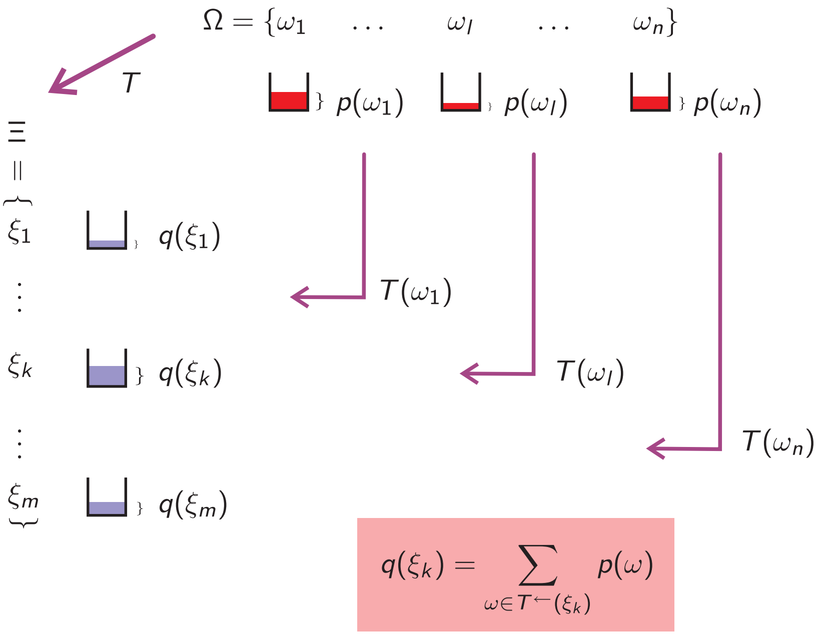
Nech (Ω, p) a (Ξ, q) sú konečné (diskrétne) pravdepodobnostné priestory (konštrukciu možno opísať aj pre nediskrétny prípad). Nech T je také zobrazenie z $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ do $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$, že $q(\xi_k) = \sum_{\omega_l \in T^{\leftarrow}(\xi_k)} p(\omega_l)$ pre všetky $k \in \{1, 2, ..., m\}$, pričom $q(\xi_k) > 0$. Potom sa T sa nazýva transformáciou (Ω, p) na (Ξ, q) a (Ξ, q) nazýva T-obrazom (Ω, p). Špeciálnym prípadom je náhodná premenná: ak Ξ je množina reálnych čísel, potom T je náhodná premenná.

Nech T je transformácia (Ω, p) na (Ξ, q). Potom T môžeme znázorniť (pozri obr. 10) ako systém n potrubí $\omega_l \mapsto T(\omega_l)$, cez ktoré sa z nádoby ω_l prelieva $p(\omega_l)$ tekutiny do nádoby $\xi_k = T(\omega_l)$.

Ak pohár ξ_k je cieľom viacerých potrubí, potom $q(\xi_k)$ (objem tekutiny v pohári) je súčtom $\sum_{\omega_l \in T^{\leftarrow}(\xi_k)} p(\omega_l)$, t. j. celkový prílev daných potrubí.

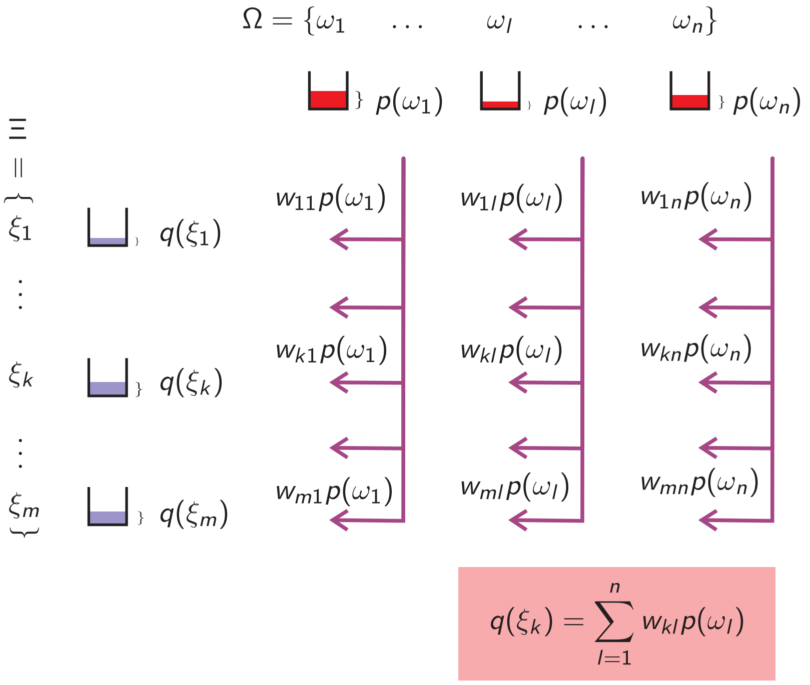
Majme diskrétne priestory (Ω, p) a (Ξ, q). Pýtame sa, či vždy existuje zobrazenie $T : \Omega \to \Xi$ také, že (Ξ, q) je T-obrazom (Ω, p). Je vždy možné vyliať celý objem $p(\omega_l)$ každého pohára ω_l do nejakého (prázdneho pohára) ξ_k takým spôsobom, že pohár ξ_k, $k \in 1, 2, ..., m$, bude obsahovať presne $q(\xi_k)$ tekutiny?

V klasickom prípade to vždy možné nie je. Pretože ak $n < m$, T by nebolo zobrazením.



Obr. 10

Jedno z možných riešení problému načrtnutému vyššie bolo navrhnuté v [25]. Názorne je priblížené na obr. 11.



Obr. 11

Vektor $(w_{1l}, w_{2l}, ..., w_{ml})$ určuje, že z ω_l, $l = 1, 2, ..., n$, sa do ξ_k, $k = 1, 2, ..., m$ preleje $w_{kl}p(\omega_l)$. Celkový prílev do ξ_k sa rovná $q(\xi_k) = \sum_{l=1}^{n} w_{kl}p(\omega_l)$.

Všimnime si, že ak zvolíme $w_{kl} = q(\xi_k)$, tak $q(\xi_k) = \sum_{l=1}^{n} q(\xi_k)p(\omega_l) = q(\xi_k)\sum_{l=1}^{n} p(\omega_l)$ a $T((p(\omega_1), p(\omega_2), ..., p(\omega_n))) = (q(\xi_1), q(\xi_2), ..., q(\xi_m))$, t. j., $T(p) = q$ pre každé p (nezávisle na voľbe).

Existujú špeciálne prípady riešenia transportačného problému:

- „Nezávislé“ riešenie transportačného problému:

  Nech vektor $(p(\omega_1), p(\omega_2), ..., p(\omega_n))$ je pravdepodobnosť na Ω a $(q(\xi_1), q(\xi_2), ..., q(\xi_m))$ je pravdepodobnosť na Ξ. Nech W je matica, ktorej k-ty riadok má tvar $(q(\xi_k), q(\xi_k), ..., q(\xi_k))$, t. j. $w_{kl} = q(\xi_k)$, $l = \{1, 2, ..., n\}$. Potom „deliteľné“ potrubie určené maticou W „preleje“ $p = (p(\omega_1), p(\omega_2), ..., p(\omega_n))$ do $q = (q(\xi_1), q(\xi_2), ..., q(\xi_m))$. „Výstup nezáleží na vstupe“.

- Klasické potrubie je určené maticou W, ktorá má v každom stĺpci jednu jednotku a samé nuly („všetko, alebo nič“, t. j. nedelíme).

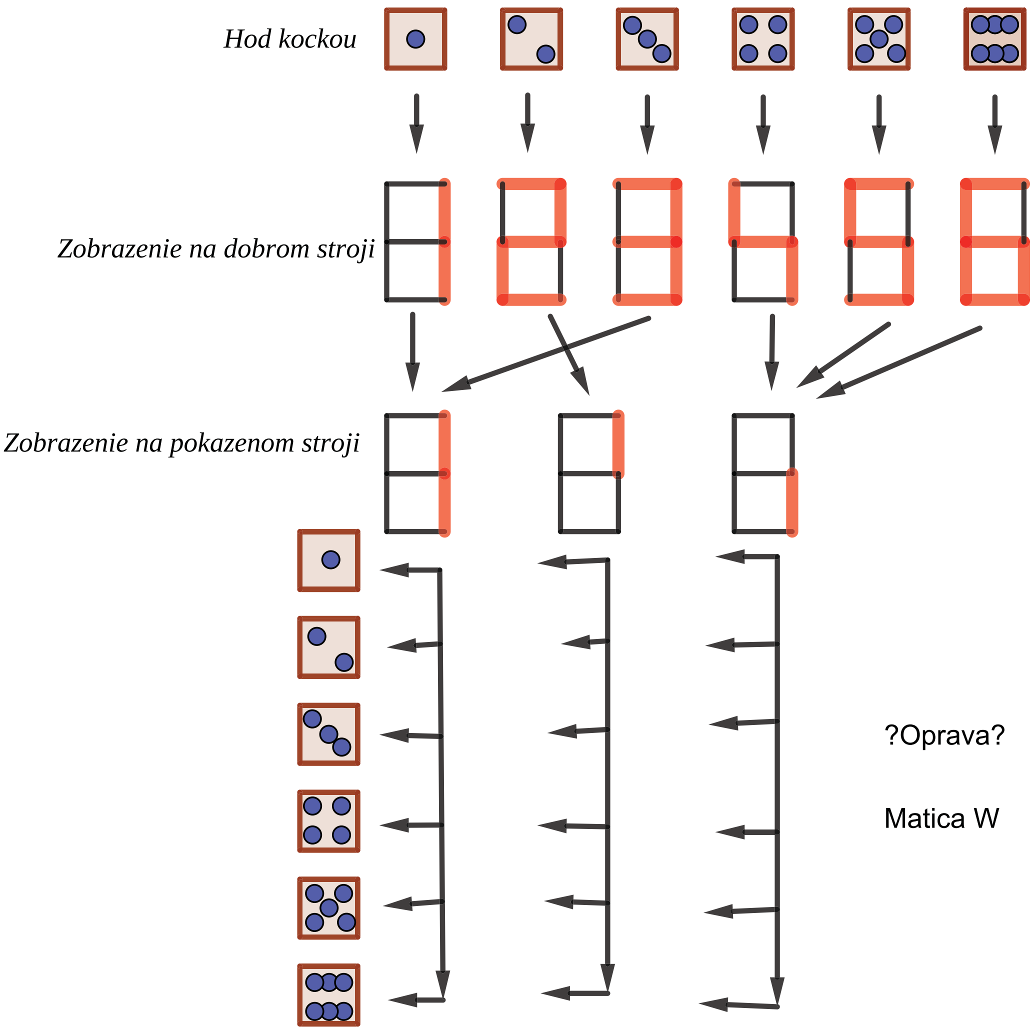
Môžeme si všimnúť, že matica W (prostredníctvom násobenia vektormi sprava, resp. zľava) určuje dve zobrazenia:

- Prvé z nich každej pravdepodobnostnej miere t na $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ vo forme stĺpcového vektora $\bar{t} = (t_1, t_2, ..., t_n)$ priradí súčin $W.\bar{t}$, teda pravdepodobnostnú mieru na Ξ vo forme stĺpcového vektora $\bar{s} = (s_1, s_2, ..., s_m)$. W teda určuje zobrazenie pravdepodobnostných mier na Ω do pravdepodobnostných mier na Ξ.

- Druhé z nich každej fuzzy podmnožine (deliteľnej udalosti) množiny Ξ vo forme riadkového vektora $\bar{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)$ priradí fuzzy podmnožinu (deliteľnú udalosť) vo forme riadkového vektora $\bar{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) = \bar{u}.W$, t. j. W určuje zobrazenie fuzzy z podmnožín Ξ do fuzzy podmnožín Ω.

Tieto dve zobrazenia vytvárajú spomínaný stochastický kanál.

V príklade 3 sa pracuje s transformačnou maticou opisujúcou stochastický kanál. Tento príklad vedie k podmienenej pravdepodobnosti.



Obr. 12

Príklad 3. Nech sú výsledky hodu kockou kódované s využitím „paličkového displeja“. Predpokladajme, že je pokazený a zobrazovať môže iba prostredníctvom vysvietenia „dvoch zvislých paličiek vpravo“, pozri obr. 12. Pokazený displej zobrazuje len tri výsledky, ich pravdepodobnosť reprezentuje pravdepodobnostný vektor $(2/6, 1/6, 3/6)$. Ako môžeme rekonštruovať informáciu o pôvodnom pokuse hode kockou, ktorý má šesť výsledkov, každý s pravdepodobnosťou $\frac{1}{6}$?

Jednou z možností, ako nastolenú otázku zodpovedať, je opísať uvedenú situáciu prostredníctvom matice W typu (6×3) , ktorá pravdepodobnostnú mieru $p = (\frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6})$ prevedie na pravdepodobnostnú mieru $q = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$. t. j. $\bar{q} \mapsto W.\bar{p}$.

Ak W obsahuje len nuly a jednotky, tak riešenie neexistuje. Vyhovuje matica

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Platí $q_1 = q_3 = \frac{1}{2}.\frac{2}{6} + 0 + 0 = \frac{1}{6}$,
$q_2 = 0 + 0 + 1.\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$,
$q_4 = q_5 = q_6 = 0 + 0 + \frac{1}{3}.\frac{3}{6} = \frac{1}{6}$.

Existujú aj iné riešenia, napr. „nezávislé (degenerované)“, keď všetky prvky matice sú $\frac{1}{6}$, ale podľa [2], [3] je toto riešenie „kánonické“ (stĺpce matice W sú podmienené pravdepodobnosti v kánonickom združenom experimente). Zobrazenie „$\bar{q} \mapsto W.\bar{p}$ je kvantové“: priraďuje degenerovanú (Diracovu) mieru (1,0,0) na množine $\{|, {}_{|}, {}^{|}\}$ nedegenerovanej miere $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ na množine $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Zobrazenie „$\bar{v} \mapsto \bar{u}.W$ je fuzzy“: zobrazuje booleovskú udalosť $\{1\}$, t. j. podmnožinu množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ na fuzzy (deliteľnú) udalosť $(\frac{1}{2}, 0, 0)$, t.j fuzzy podmnožinu množiny $\{|, {}_{|}, {}^{|}\}$.

Obidva problémy (transportačný, oprava poruchy kódovania) možno zovšeobecniť takto:

Uvažujeme o dvoch konečných pravdepodobnostných priestoroch a hľadáme „stochastický kanál, ktorý stochastickú informáciu o prvom priestore transformuje na stochastickú informáciu o druhom priestore“. V teórii pravdepodobnosti A. N. Kolmogorova stochastický kanál modelujeme náhodnou premennou a sú situácie, kedy takýto kanál neexistuje. V stochastickom modeli s deliteľnými udalosťami áno.

4.2 Združený experiment a stochastická nezávislosť

Táto podkapitola je spracovaná podľa článku [3], ktorý je venovaný stochastickej závislosti/nezávislosti v kontexte fuzzy náhodných udalostí, založenej na stochastických kanáloch a združených experimentoch. V prvej časti prezentujeme komutatívne diagramy opisujúce klasický prípad a druhá časť je venovaná ich zovšeobecneniam. Klasická stochastická nezávislosť je symetrická, ale my v tretej časti definujeme a skúmame asymetrickú stochastickú nezávislosť, pričom symetrická stochastická nezávislosť je predstavená ako konjukcia dvoch asymetrických. V poslednej časti konštruujeme podmienenú pravdepodobnosť v pojmoch združeného experimentu a skúmame, aký vzťah má konštrukcia ku zovšeobecnenej pravdepodobnosti na kvantových štruktúrach so súčinom ([42], [15]).

4.2.1 Klasický prípad

Nech $(\Omega, \mathbf{A})$ a $(\Xi, \mathbf{B})$ sú merateľné priestory a nech $f : \Omega \longrightarrow \Xi$ je merateľné zobrazenie. Vzorové zobrazenie $f^{\leftarrow}$, $f^{\leftarrow}(B) = \{\omega \in \Omega;\ f(\omega) \in B\}$, $B \in \mathbf{B}$, je sekvenčne spojitý (vzhľadom na bodovú sekvenčnú konvergenciu indikátorových funkcií) booleovský homomorfizmus z $\mathbf{B}$ do $\mathbf{A}$. Ďalej, $f^{\leftarrow}$ definuje zobrazenie $T_{f^{\leftarrow}}$ z množiny $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ všetkých pravdepodobnostných mier na $\mathbf{A}$ do množiny $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ všetkých pravdepodobnostných mier na $\mathbf{B}$ (nazýva sa štatistické zobrazenie): $T_{f^{\leftarrow}}(p)$ je zložením $p \circ f^{\leftarrow}$, $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$.

Nech $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ je pravdepodobnostný priestor. Pripomeňme, že dva systémy merateľných množín $\mathbf{B}, \mathbf{C} \subseteq \mathbf{A}$ sa nazývajú stochasticky nezávislé, ak $p(B \cap C) = p(B).p(C)$ vždy, keď $B \in \mathbf{B}$ a $C \in \mathbf{C}$. Všimnime si, že v klasickej pravdepodobnostnej teóriii pojem stochastickej nezávislosti je teda symetrický.

Pravdepodobnostné priestory $(\Omega, \mathbf{A}, p)$, $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, opisujúce náhodné experimenty, majú fixný komponent $(\Omega, \mathbf{A})$ a $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ reprezentuje „voľbu“ vhodnej pravdepodobnostnej miery, reprezentujúcej „zákon náhodnosti“, jednu z možných pravdepodobnostných mier spojených so skúmaným experimentom. Nech $(\Xi, \mathbf{B})$ je iný merateľnýný priestor a nech $f : \Omega \longrightarrow \Xi$ je merateľné zobrazenie. Potom voľba $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ determinuje voľbu $p \circ f^{\leftarrow} \in \mathcal{P}(\mathbf{B})$. Hovoríme, že $f^{\leftarrow}$ „posúva“ (pushes forward) p do $p \circ f^{\leftarrow}$, alebo že $f^{\leftarrow}$ „prevádza stochastickú informáciu p o $\mathbf{A}$ do $p \circ f^{\leftarrow}$ o $\mathbf{B}$’“. My budeme skúmať stochastickú závislosť/nezávislosť v kontexte toho, ako diagramy, merateľných zobrazení vplývajú na voľbu pravdepodobnostných mier na korešpondujúcich σ-poliach náhodných udalostí.

Nech $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B})$ je súčinom $(\Omega, \mathbf{A})$ a $(\Xi, \mathbf{B})$, t. j. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ je najmenšia σ-algebra podmnožín $\Omega \times \Xi$, ktorá obsahuje všetky obdĺžniky $A \times B; A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}$. Nech

$$\begin{tikzcd}
 & {[0,1]} & \\
\mathbf{A} \arrow[ur, "L_1(r)"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_1{}^{\leftarrow}"] & \mathbf{A}\times\mathbf{B} \arrow[u, "r"'] \arrow[ul, phantom, "\#"] \arrow[ur, phantom, "\#"] & \mathbf{B} \arrow[ul, "L_2(r)"'] \arrow[l, "\mathrm{pr}_2{}^{\leftarrow}"']
\end{tikzcd}$$

Obr. 13

$\mathrm{pr}_1 : \Omega\times\Xi \longrightarrow \Omega$, $\mathrm{pr}_2 : \Omega\times\Xi \longrightarrow \Xi$ sú zvyčajné merateľné projekcie ($\mathrm{pr}_1(\omega,\xi) = \omega$, $\mathrm{pr}_2(\omega,\xi) = \xi$, $\omega \in \Omega$, $\xi \in \Xi$) a nech $\mathrm{pr}_1^{\leftarrow} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ a $\mathrm{pr}_2^{\leftarrow} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ sú príslušné merateľné vzorové zobrazenia. Nech $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$. Potom, $\mathrm{pr}_1^{\leftarrow}(A) = A\times\Xi$ a $\mathrm{pr}_2^{\leftarrow}(B) = \Omega\times B$. Pre $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, zloženie $r\circ\mathrm{pr}_1^{\leftarrow}$ a $r\circ\mathrm{pr}_2^{\leftarrow}$ definuje laterálne zobrazenia $L_1 : \mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ a $L_2 : \mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$. Každý „súčinový“ experiment $(\Omega\times\Xi, \mathbf{A}\times\mathbf{B}, r)$ teda definuje dva „laterálne“ experimenty $(\Omega, \mathbf{A}, L_1(r))$ a $(\Xi, \mathbf{B}, L_2(r))$, pozri obr. 13 .

Definícia 25. Nech $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ sú klasické náhodné experimenty. Nech $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ a nech $L_1(r) = p$, $L_2(r) = q$. Potom sa $(\Omega\times\Xi, \mathbf{A}\times\mathbf{B}, r)$ nazýva *klasický združený experiment.*

Nech $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ sú klasické náhodné experimenty. Označme $\mathcal{J}(p,q)$ množinu všetkých klasických združených experimentov $(\Omega\times\Xi, \mathbf{A}\times\mathbf{B}, r)$. Nech $p\times q$ je súčinová miera $(p\times q)(A\times B) = p(A).q(B)$, $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$). Keďže $L_1(p\times q) = p$ a $L_2(p\times q) = q$, množina $\mathcal{J}(p,q)$ nie je prázdna. Poznamenajme, že (v netriviálnom prípade) požiadavky $L_1(r) = p$ a $L_2(r) = q$ nedeterminujú r jednoznačne.

Nech $(\Lambda, \mathbf{C})$ je merateľný priestor a nech $f : \Lambda \longrightarrow \Omega$, $g : \Lambda \longrightarrow \Xi$ sú merateľné zobrazenia. Potom existuje práve jedno merateľné zobrazenie $h : \Lambda \longrightarrow \Omega\times\Xi$ také, že $\mathrm{pr}_1 \circ h = f$ a $\mathrm{pr}_2 \circ h = g$, konkrétne $h(\lambda) = (f(\lambda), g(\lambda)), \lambda \in \Lambda$. $(\Omega\times\Xi, \mathbf{A}\times\mathbf{B})$ je kategoriálny súčin merateľných priestorov $(\Omega, \mathbf{A})$ a $(\Xi, \mathbf{B})$. Označme $h = f\otimes g$. Teda voľba $s \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$ jednoznačne determinuje voľby $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, $q \in \mathcal{P}(\mathbf{B})$ a $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ tak, že $p = s\circ f^{\leftarrow}$, $q = s\circ g^{\leftarrow}$, $r = s\circ(f\otimes g)^{\leftarrow}$, pozri obr. 14.

Priamočiary dôkaz nasledujúcej vety je vynechaný.

Lema 9. *Nech* $(\Omega, \mathbf{A}, p)$, $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ *a* $(\Lambda, \mathbf{C}, s)$ *sú klasické náhodné experimenty. Nech* $f : \Lambda \longrightarrow \Omega$, $g : \Lambda \longrightarrow \Xi$ *sú merateľné zobrazenia také, že* $s\circ f^{\leftarrow} = p$ *a* $s\circ g^{\leftarrow} = q$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{pr}_1^{\leftarrow}"] \arrow[dr, "f^{\leftarrow}"'] & \mathbf{A} \times \mathbf{B} \arrow[d, "(f \otimes g)^{\leftarrow}"] \arrow[dl, phantom, "\#", near end] \arrow[dr, phantom, "\#", near end] & \mathbf{B} \arrow[l, "\mathrm{pr}_2^{\leftarrow}"'] \arrow[dl, "g^{\leftarrow}"] \\
 & \mathbf{C} \arrow[d, "s"] & \\
 & {[0,1]} &
\end{tikzcd}$$

Obr. 14

Nech $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$ *je združeným experimentom* $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ *a* $(\Xi, \mathbf{B}, q)$*. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné*

(i) $f^{\leftarrow}(\mathbf{A}) = \{f^{\leftarrow}(A); A \in \mathbf{A}\}$ *a* $g^{\leftarrow}(\mathbf{B}) = \{g^{\leftarrow}(B); B \in \mathbf{B}\}$ *sú stochasticky nezávislé v* $(\Lambda, \mathbf{C}, s)$.

(ii) $\mathrm{pr}_1^{\leftarrow}(\mathbf{A}) = \{A \times \Xi; A \in \mathbf{A}\}$ *a* $\mathrm{pr}_2^{\leftarrow}(\mathbf{B}) = \{\Omega \times B; B \in \mathbf{B}\}$ *sú stochasticky nezávislé v* $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$.

(iii) $r = p \times q$.

Definícia 26. Nech $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$ je *klasickým združeným experimentom* $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ a nech $r = p \times q$. Potom $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ sa nazývajú *stochasticky nezávislé* v $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$.

Poznámka 3. Keďže pravdepodobnosť $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ v združenom experimente $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ nie je jednoznačne určená, pravdepodobnostné priestory nemajú kategoriálny súčin. Lema 9 implikuje, že $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, p \times q)$, spolu s projekciami $\mathrm{pr}_i, i = 1, 2$, môže byť považovaný za „nezávislý kategoriálny súčin“. Ak $(\Lambda, \mathbf{C}, s)$ je pravdepodobnostný priestor, $f : \Lambda \longrightarrow \Omega$ a $g : \Lambda \longrightarrow \Xi$ sú také merateľné a mieru zachovávajúce zobrazenia také, že $f^{\leftarrow}(\mathbf{A})$ a $g^{\leftarrow}(\mathbf{B})$ sú stochasticky nezávislé v $(\Lambda, \mathbf{C}, s)$, tak existuje jediné také merateľné a mieru zachovávajúce zobrazenie $h : \Lambda \longrightarrow \Omega \times \Xi$ také, že $\mathrm{pr}_1 \circ h = f$, $\mathrm{pr}_2 \circ h = g$, a teda $s \circ h^{\leftarrow} = p \times q$.

Ako uvidíme (modifikujúc diagram na obr. 14), posun z Booleovej logiky do viachodnotovej Łukasiewiczovej logiky nám umožňuje definovať asymetrickú nezávislosť pre fuzzyfikované náhodné experimenty tak, že symetrická nezávislosť sa stane konjukciou dvoch asymetrických.

4.2.2 Fuzzyfikovaný prípad

V tejto časti, opíšeme konštrukciu fuzzyfikácie združeného experimentu vedúcu k asymetrickej nezávislosti a podmienenej pravdepodobnosti. Na rozdiel od klasického modelu, kde základom štatistického kanálu je meraleľné zobrazenie, vo fuzzyfikovanom modeli je základom pozorovateľná, t. j. sekvenčne spojitý A-homomorfizmus.

Definícia 27. Nech $(\Omega, \mathbf{A})$ je merateľný priestor. Potom $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}))$ nazývame *priestor udalostí* a $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$, $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, nazývame *experiment.*

Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ je experiment a nech $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}))$ je priestor udalostí. Nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pozorovateľná. Pre každý pravdepodobnostný integrál $\overline{p} = \int(.)\mathrm{d}p$ na $\mathcal{M}(\mathbf{A})$, je zloženie $\overline{p} \circ g$ dvoch pozorovateľných pozorovateľná, čiže pravdepodobnostný integrál $\overline{q} = \int(.)\mathrm{d}q$ na $\mathcal{M}(\mathbf{B})$. Toto vytvára štatistické zobrazenie $T_g : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$, ktoré sprostredkovane zobrazuje p na $q = T_g(p)$. Pre $u \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$ máme $\int u\mathrm{d}(T_g(p)) = \int g(u)\mathrm{d}p$ a pre $p = \delta_\omega$, $\omega \in \Omega$, dostaneme $(g(u))(\omega) = \int g(u)\mathrm{d}(\delta_\omega) = \int u\mathrm{d}(T_g(\delta_\omega))$.

Priestory udalostí zovšeobecňujú merateľné priestory a štatistické zobrazenie zovšeobecňujú merateľné zobrazenia. Na vybudovanie pojmu asymetrickej nezávislosti potrebujeme definovať združený experiment.

Definícia 28. Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ sú dva experimenty. Potom $(\Omega \times \Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$, kde $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ a $L_1(r) = p$, $L_2(r) = q$, nazývame *združený experiment.*

Poznamenajme, že laterálne zobrazenia $L_1 : \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ a $L_2 : \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ zovšeobecňujú projekcie $\mathrm{pr}_1 : \Omega \times \Xi \longrightarrow \Omega$ a $\mathrm{pr}_2 : \Omega \times \Xi \longrightarrow \Xi$. Duálne zobrazenia sú definované kánonickým spôsobom. Pre $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$, definujme $\tilde{u} \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ takto: pre $\omega \in \Omega, \xi \in \Xi$, položme $\tilde{u}(\omega, \xi) = u(\omega)$ a označme $e_1 : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ výsledné kánonické vnorenie posielajúce u do $\tilde{u}$; $e_2 : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ je definované analogicky ($\tilde{v}(\omega, \xi) = v(\xi)$). Zjavne, e_1 a e_2 sú pozovateľné. Nech T_{e_1} a T_{e_1} sú príslušné štatistické zobrazenia. Ľahko sa overí, že $L_1 = T_{e_1}$, $L_2 = T_{e_2}$, $\int u\mathrm{d}p = \int \tilde{u}\mathrm{d}r, u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$, a $\int v\mathrm{d}q = \int \tilde{v}\mathrm{d}r, v \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$.

„Stochastický kanál“ je kanál, ktorým „stochastické informácie“ prúdia z jedného priestoru udalostí do iného priestoru udalostí. V klasickom prípade, dvojice

$(f, f^{\rightarrow})$ spĺňajú účel a v zovšeobecnenom prípade duálne zobrazenia (pozri [29]) pozorovateľná $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ a príslušné štatistické zobrazenie $T_g : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ hrajú kľúčovú rolu.

Definícia 29. Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}))$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}))$ sú priestory udalostí, nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pozorovateľná a nech $T_g : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ je korešpondujúce štatistické zobrazenie. Potom sa (g, T_g) nazýva *stochastický kanál.*

Kľúčová pre naše skúmanie je táto otázka: Ako pozorovateľná $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$, resp. príslušný stochastický kanál (g, T_g), ovplyvňuje združený experiment $(\Omega \times \Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$?

Nech $(\Omega, \mathbf{A}), (\Xi, \mathbf{B}), (\Lambda, \mathbf{C})$ sú merateľné priestory, nech $f : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ a $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ sú pozorovateľné, nech $T_f : \mathcal{P}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ a $T_g : \mathcal{P}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ sú príslušné štatistické zobrazenia. Nech pre $\lambda \in \Lambda$ je δ_λ Diracova pravdepodobnostná bodová miera ($\delta_\lambda(C) = 1$ pre $C \in \mathbf{C}$ a $\delta_\lambda(C) = 0$ inak). Nech $T_f(\delta_\lambda) \times T_g(\delta_\lambda)$ je príslušná súčinová pravdepodobnostná miera na $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Nech pre $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$,

$$(\otimes) \qquad (h(u))(\lambda) = \int u \mathrm{d}(T_f(\delta_\lambda) \times T_g(\delta_\lambda)),\ \lambda \in \Lambda,$$

a nech $h : \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow [0,1]^\Lambda$ je určené predpisom $(\otimes)$.

Propozícia 1. *(i) Zobrazenie h je pozorovateľná z $\mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ do $\mathcal{M}(\mathbf{C})$.*

(ii) Nech $e_1 : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ a $e_2 : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ sú kánonické vnorenia. Potom $h \circ e_1 = f$ a $h \circ e_2 = g$.

Dôkaz. (i) Priamo z $(\otimes)$ vyplýva, že h je sekvenčne spojité, zachováva usporiadanie, konštanty a čiastočnú operáciu „súčtu“, t. j. $h(v + u) = h(v) + h(u)$ pre $u, v \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), u \leq (1 - v)$. Nech $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$. Ostáva dokázať, že $h(u) \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$. To vyplýva z Fubiniho vety. Platí $(h(u))(\lambda) = \int_\Omega(\int_\Xi u(\omega, \xi)\mathrm{d}(T_g(\delta_\lambda)))\mathrm{d}(T_f(\delta_\lambda))$, kde $\int_\Xi u(\omega, \xi)\mathrm{d}(T_g(\delta_\lambda))$ je $\mathbf{A}$-merateľná funkcia $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$. Potom $\int_\Omega v \mathrm{d}(T_f(\delta_\lambda)) = \int_\Lambda f(v)\mathrm{d}(\delta_\lambda) = (f(v))(\lambda)$, a teda, $h(u) = f(v) \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$. To dokazuje (i).

(ii). Nech $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$. Z $(\otimes)$ a z Fubiniho vety, $(h(e_1(u)))(\lambda) = \int e_1(u)\mathrm{d}(T_f(\delta_\lambda) \times T_g(\delta_\lambda)) = \int_\Omega(\int_\Xi u(\omega, \xi)\mathrm{d}(T_g(\delta_\lambda)))\mathrm{d}(T_f(\delta_\lambda)),\ \lambda \in \Lambda$. Keďže pre $\omega \in \Omega$ a $\xi \in \Xi$ platí $(e_1(u))(\omega, \xi) = u(\omega).1_\Xi(\xi)$, kde $1_\Xi(\xi) = 1$ pre všetky

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[r, "e_1"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \arrow[d, "h"] \arrow[d, phantom, shift right=6ex, "\#"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "\#"] & \mathcal{M}(\mathbf{B}) \arrow[l, "e_2"'] \arrow[dl, "g"] \\
 & \mathcal{M}(\mathbf{C}) &
\end{tikzcd}$$

Obr. 15

$\xi \in \Xi$, posledný integrál sa zredukuje na $\int f(u) \mathrm{d}(\delta_\lambda) = (f(u))(\lambda)$. Čiže $h \circ e_1 = f$. Dôkaz $h \circ e_2 = g$ je analogický. □

Dôsledok 3. *Diagram na obr. 15 komutuje.*

Definícia 30. Nech $f : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ a $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ sú pozorovateľné. Potom pozorovateľná $h : \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ definovaná pomocou $(\otimes)$ sa nazýva *súčin pozorovateľných* f a g; budeme ju označovať ako $f \otimes g$.

Propozícia 2. *Nech* $f \otimes g : \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ *je súčin pozorovateľných a nech* $T_{f \otimes g} : \mathcal{P}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ *je príslušné štatistické zobrazenie. Potom*

(i) Pre každé $\lambda \in \Lambda$, Λ *je nosná množina* $\mathbf{C}$ *, platí* $T_{f \otimes g}(\delta_\lambda) = T_f(\delta_\lambda) \times T_g(\delta_\lambda)$.

(ii) Nech $\Lambda = \Omega$, $\mathbf{C} = \mathbf{A}$ *a nech* f *je identickou pozorovateľnou* $\mathrm{id} : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$. *Potom pre každé* $\omega \in \Omega$ *platí* $T_{\mathrm{id} \otimes g}(\delta_\omega) = \delta_\omega \times T_g(\delta_\omega)$.

Dôkaz. (i). Máme ukázať, že pre každé $A \times B, A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}$, platí $(T_{f \otimes g}(\delta_\lambda))(A \times B) = (T_f(\delta_\lambda) \times T_g(\delta_\lambda))(A \times B) = (T_f(\delta_\lambda))(A).(T_g(\delta_\lambda))(B)$. Z $T_{f \otimes g}(\delta_\lambda) \in \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, dostaneme $(T_{f \otimes g}(\delta_\lambda))(A \times B) = \int \chi_A.\chi_B \mathrm{d}(T_{f \otimes g}(\delta_\lambda)) = \int (f \otimes g)(\chi_A.\chi_B) \mathrm{d}(\delta_\lambda) = (f \otimes g)(\chi_A.\chi_B)(\lambda)$. Z$(\otimes)$, vyplýva, že $(f \otimes g)(\chi_A.\chi_B)(\lambda) = \int \chi_A.\chi_B \mathrm{d}(T_f(\delta_\lambda) \times T_g(\delta_\lambda))$. Použitím Fubiniho vety dostaneme $(f \otimes g)(\chi_A.\chi_B)(\lambda) = (\int \chi_A \mathrm{d}(T_f(\delta_\lambda))).(\int \chi_B \mathrm{d}(T_g(\delta_\lambda))) = (T_f(\delta_\lambda) \times T_g(\delta_\lambda))(A \times B)$. To dokazuje (i).

(ii). Nech $\omega \in \Omega$, $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$. Pripomeňme, že $(T_{\mathrm{id} \otimes g}(\delta_\omega))(A \times B) = \int (\mathrm{id} \otimes g)(\chi_A.\chi_B) \mathrm{d}\delta_\omega$ a podľa $(\otimes)$, platí $(\mathrm{id} \otimes g)(\chi_A.\chi_B)(\omega) = \int \chi_A.\chi_B \mathrm{d}(\delta_\omega \times T_g(\delta_\omega))$, $\omega \in \Omega$. Preto $((\mathrm{id} \otimes g)(\chi_A.\chi_B))(\omega) = \delta_\omega(A).(T_g(\delta_\omega))(B)$, preto $(T_{\mathrm{id} \otimes g}(\delta_\omega))(A \times B) = \delta_\omega(A).((T_g)(\delta_\omega))(B)$. To dokazuje (ii). □

Poznámka 4. Poznamenajme, že pojmy štatistického zobrazenia a súčinu $T \otimes S$ dvoch štatistických zobrazení $T : \mathcal{P}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ a $S : \mathcal{P}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ môžu byť definované priamo cez Markovove jadro (pozri napr. [6], [34], [16]). Keďže dve štatistické zobrazenia sa rovnajú vždy, keď sa zhodujú na Diracových pravdepodobnostných mierach, a keďže $(T \otimes S)(\delta_\lambda) = T(\delta_\lambda) \times S(\delta_\lambda)$ pre všetky $\lambda \in \Lambda$, Λ je nosná množina $\mathbf{C}$, tak v predchádzajúcej propozícii platí $T_{f \otimes g} = T_f \otimes T_g$.

Propozícia 3. *Nech* $\mathrm{id} : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ *je identická pozorovateľná, nech* $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ *je pozorovateľná, nech* $T_{\mathrm{id}} : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *a* $T_g : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ *sú príslušné štatistické zobrazenia. Potom existuje jediné štatistické zobrazenie* $T : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ *také, že diagram na obr. 16 komutuje a* $T = T_{\mathrm{id} \otimes g}$.

Dôkaz. V predchádzajúcej propozícii z (ii) vyplýva, že pre každé $\delta_\omega \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, $\omega \in \Omega$, platí $T_{\mathrm{id} \otimes g}(\delta_\omega) = \delta_\omega \times T_g(\delta_\omega)$. Teda $(L_1 \circ T_{\mathrm{id} \otimes g})(\delta_\omega) = T_{\mathrm{id}}(\delta_\omega)$ a $(L_2 \circ T_{\mathrm{id} \otimes g})(\delta_\omega) = T_g(\delta_\omega)$. Dve štatistické zobrazenia sa rovnajú vždy, keď sa zhodujú na Diracových pravdepodobnostných mierach, a preto $L_1 \circ T = T_{\mathrm{id}}$, $L_2 \circ T = T_g$.

Nech $T : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ je také štatistické zobrazenie, že $L_1 \circ T = T_{\mathrm{id}}$, $L_2 \circ T = T_g$. Treba ukázať, že $T = T_{\mathrm{id} \otimes g}$. Pripomeňme, že $T = T_{\mathrm{id} \otimes g}$ práve vtedy, keď pre každé $\omega \in \Omega$ platí $T(\delta_\omega) = T_{\mathrm{id} \otimes g}(\delta_\omega)$.

Použijeme dôkaz sporom. Predpokladajme, že $T \neq T_{\mathrm{id} \otimes g}$. Potom existuje $\omega \in \Omega$ také, že $T(\delta_\omega) \neq T_{\mathrm{id} \otimes g}(\delta_\omega)$. $L_1(T(\delta_\omega)) = \delta_\omega$ implikuje, že $(T(\delta_\omega))((\Omega \setminus \{\omega\}) \times \Xi) = 0$ a $(T(\delta_\omega))((\{\omega\} \times \Xi) = 1$. Ďalej, $L_2 \circ T = T_g$ implikuje, že pre každé $B \in \mathbf{B}$ platí $(T_g(\delta_\omega))(B) = (T(\delta_\omega))(\Omega \times B) = (T(\delta_\omega))((\{\omega\} \times B) \cup ((\Omega \setminus \{\omega\}) \times B) = (T(\delta_\omega))((\{\omega\} \times B))$. Čiže pre každé $A \times B, A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}$, platí $(T(\delta_\omega))(\Omega \times B) = (\delta_\omega(A)).(T_g(\delta_\omega))(B)$ a teda $T(\delta_\omega) = \delta_\omega \times T_g(\delta_\omega)$. Nakoniec z (ii) v predchádzajúcej propozícii vyplýva, že $\delta_\omega \times T_g(\delta_\omega) = T_{\mathrm{id} \otimes g}(\delta_\omega)$, čo je spor. □

Dôsledok 4. *(i) Existuje jediná taká pozorovateľná* $h : \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$*, že diagram na obr. 17 komutuje a* $h = \mathrm{id} \otimes g$.

(ii) Pre každé $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *existuje jediné také* $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$*, že* $\overline{r} = \overline{p} \circ (\mathrm{id} \otimes g)$.

Definícia 31. Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ sú experimenty, nech $\mathrm{id} : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je identická pozorovateľná, nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pozorovateľná, nech $T_{\mathrm{id}} : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ a $T_g : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ sú príslušné štatistické zobrazenia. Nech $T_g(p) = q$ a $r = T_{\mathrm{id} \otimes g}(p)$. Potom sa trojica $(\Omega \times \Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$ sa nazýva *g-združený experiment* experimentov $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\mathbf{A}) & & \mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \arrow[ll, "L_1"'] \arrow[rr, "L_2"] & & \mathcal{P}(\mathbf{B}) \\
& \# & & \# & \\
& & \mathcal{P}(\mathbf{A}) \arrow[uull, "T_{\mathrm{id}}"] \arrow[uu, dashed, "\exists!\ T"] \arrow[uurr, "T_g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Obr. 16

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[rr, "e_1"] \arrow[ddrr, "\mathrm{id}"'] & & \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \arrow[dd, dashed, "\exists!\ \mathrm{id}\otimes g"] & & \mathcal{M}(\mathbf{B}) \arrow[ll, "e_2"'] \arrow[ddll, "g"] \\
& \# & & \# & \\
& & \mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[d, "\overline{p}"] & & \\
& & \mathcal{M}(\mathbf{T}) & &
\end{tikzcd}$$

Obr. 17

Nech $(\Omega \times \Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$ je združený experiment $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$. Nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pozorovateľná a nech (g, T_g) je príslušný stochastický kanál taký, že $T_g(p) = q$. Potom pravdepodobnosť $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ je jednoznačne determinovaná v takomto zmysle: $T_{\mathrm{id}\otimes g}$ je jediné štatistické zoprazenie T z $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ do $\mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ také, že $L_1 \circ T = T_{\mathrm{id}}$, $L_2 \circ T = T_g$ a $r = T_{\mathrm{id}\otimes g}(p)$. Jednoducho povedané, $(\Omega \times \Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}(T_{\mathrm{id}\otimes g}(p)))$ je jediný združený experiment, ktorý „zohľadňuje stochastický kanál“ (g, T_g), $T_g(p) = q$.

Poznámka 5. Hovoríme, že ak $L_2 \circ T = T_g$, $T : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, tak T_g je faktorizované cez $\mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$; súčiny a faktorizácie štatistických zobrazení boli študované v [6], [7], [16], kde $M_1^+(\Omega, \mathbf{A})$ označuje množinu všetkých pravdepodobnostných mier na $\mathbf{A}$.

4.2.3 Asymetrická stochastická nezávislosť

Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ sú náhodné experimenty, nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pozorovateľná, a nech (g, T_g) je príslušný stochastický kanál taký, že $T_g(p) = q$. Je rozumné tvrdiť, že $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ je g-nezávislé na $\mathcal{M}(\mathbf{A})$, ak prenesená stochastická informácia $\overline{q} = \int(.)\mathrm{d}q$ o priestore udalostí $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}))$ „nediskrimuje“ voľbu stochastickej informácie o $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}))$. Presnejšie, keď $\overline{s} \circ g = \overline{q}$ pre každé $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ alebo, ekvivalentne, $T_g(s) = q$ pre každé $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Taký stochastický kanál môže byť charakterizovaný ako degenerovaný (q-hodnotový). Nasledujúca propozícia opisuje takéto kanály.

Pre $u \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$ a $\omega \in \Omega$, definujme $(g(u))(\omega) = \int u \mathrm{d}q$. To definuje zobrazenie g z $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ do $[0,1]^{\Omega}$.

Propozícia 4. *(i) g je pozorovateľná do $\mathcal{M}(\mathbf{A})$.*

(ii) $T_g(s) = q$ pre všetky $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$.

Dôkaz. (i) vyplýva priamo z definície g.

(ii). Nech $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Z definície g vyplýva, že pre každé $\chi_B \equiv \mathbf{B}$, $g(\chi_B)$ je konštantná funkcia a pre všetky $\omega \in \Omega$ máme $(g(\chi_B))(\omega) = \int \chi_B \mathrm{d}q = q(B)$. Teda $(T_g(s))(B) = \int \chi_B \mathrm{d}(T_g(s)) = \int g(\chi_B)\mathrm{d}s = q(B)$ a $T_g(s) = q$. □

Definícia 32. Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}))$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}))$ sú priestory udalostí, nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pozorovateľná, nech T_g je príslušné štatistické zobrazenie. Nech $q \in \mathcal{P}(\mathbf{B})$. Ak $T_g(s) = q$ pre všetky $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, tak g a T_g nazývame *degenerované.*

Propozícia 5. *Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ sú experimenty. Nech $\mathrm{id} : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je identická pozorovateľná, nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je degenerovaná pozorovateľná, nech $\mathrm{id} \otimes g : \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je ich súčin, nech T_{id}, T_g, a $T_{\mathrm{id} \otimes g}$ sú príslušné štatistické zobrazenia. Predpokladajme, že $T_g(p) = q \in \mathcal{P}(\mathbf{B})$. Potom pre všetky $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ platí $T_{\mathrm{id} \otimes g}(s) = s \times q$.*

Dôkaz. Nech $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$. Pripomeňme, že $(T_{\mathrm{id} \otimes g}(s)(A \times B) = \int (\mathrm{id} \otimes g)(\chi_A . \chi_B)\mathrm{d}s$ a podľa ($\otimes$) platí $(\mathrm{id} \otimes g)(\chi_A . \chi_B)(\omega) = \int \chi_A . \chi_B \mathrm{d}(\delta_\omega \times T_g(\delta_\omega))$, $\omega \in \Omega$. V dôsledku toho platí $((\mathrm{id} \otimes g)(\chi_A . \chi_B))(\omega) = \delta_\omega(A).(T_g(\delta_\omega))(B) = \delta_\omega(A).q(B)$, a teda $(T_{\mathrm{id} \otimes g}(s))(A \times B) = s(A).q(B)$. □

Definícia 33. Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ sú experimenty, nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pozorovateľná a nech $T_g : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ je príslušné štatistické zobrazenie také, že $T_g(p) = q$. Ak T_g je degenerované, potom hovoríme, že experiment $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ je *stochasticky g-nezávislý* na experimente $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$.

Predpokladajme, že experiment $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ je stochasticky g-nezávislý na experimente $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$, t. j., (g, T_g) je degenerovaný stochastický kanál, a $T_g(p) = q$. Potom, pre všetky $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ platí $T_{\mathrm{id}\otimes g}(s) = s \times T_g(s) = s \times q$. Špeciálne, $T_{\mathrm{id}\otimes g}(p) = p \times q$.

Definícia 34. Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ sú experimenty. Nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ a $f : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$ sú pozorovateľné. Ak g a f sú degenerované, tak hovoríme, že $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ sú *stochasticky nezávislé.*

Dôsledok 5. *Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ sú experimenty a nech $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ sú príslušné klasické náhodné experimenty. Nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pozorovateľná a nech $T_g : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ je príslušné štatistické zobrazenie také, že $T_g(p) = q$. Nech $(\Omega \times \Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$ je g-združený experiment experimentov $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ a nech $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$ je príslušný združený klasický náhodný experiment.*

Ak $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ je g-nezávislý na $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$, t. j. ak stochastický kanál (g, T_g) je degenerovaný, tak $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ sú stochasticky nezávislé v ich klasickom združenom náhodnom experimente $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$.

Poznámka 6. Nech sú dva klasické náhodné experimenty $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ stochasticky nezávislé v ich združenom klasickom pokuse $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$. Potom $r = p \times q$. Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$, $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ a $(\Omega \times \Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$ sú ich príslušné fuzzyfikácie. Poznamenajme, že z predpokladov nevyplýva existencia pozorovateľnej $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$, resp. $f : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$, a že medzi $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ „neexistuje žiadna stochastická väzba“. Ak totiž nastal klasický výsledok $\omega \in \Omega$, resp. $\xi \in \Xi$, tak z $\mathrm{pr}_1(\omega, \xi) = \omega$, resp. $\mathrm{pr}_2(\omega, \xi) = \xi$, vyplýva, že v „protiľahlom“ pokuse mohol nediskriminovane nastať ktorýkoľvek výsledok $\xi \in \Xi$, resp. $\omega \in \Omega$. Podobne, ak nastane udalosť $A \in \mathbf{A}$, resp. $B \in \mathbf{B}$, pričom $p(A) = r(A \times \Xi)$, resp. $q(B) = r(B \times \Omega)$, tak to nediskriminuje udalosti a ich pravdepodobnosti v „protiľahlom“ experimente. „Neexistencii“ stochastickej väzby medzi $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ „zodpovedajú“ degenerované pozorovateľné $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ a $f : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$, pričom $T_g(p) = q$, $T_f(q) = p$. To ale znamená, že stochastická nezávislosť klasických experimentov $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ je implicitnou kvalitou explicitne definovanej stochastickej nezávislosti experimentov $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$, ktorá je vyjadrená v jazyku degenerovaných pozorovateľných.

4.2.4 Poznámky o podmienej pravdepodobnosti

Uvažujme o g-združenom experimente $(\Omega \times \Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$ dvoch experimentov $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$. Podľa propozície 3 je $\overline{r} = \overline{p} \circ (\mathrm{id} \otimes g)$ v združenom experimente jednoznačne determinovaný. V tejto časti prediskutujeme, ako $\overline{r}$ reflektuje „stochastickú závislosť/nezávislosť“ $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ od $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$. Najmä nás zaujíma konštrukcia „pravdepodobnosti $R(u|v)$ udalosti $u \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$ podmienenej udalosťou $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$“. Použitím vnorení $e_1 : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, $e_2 : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, budeme chápať podmienenú udalosť $u|v$ ako udalosť $e_2(u)|e_1(v)$ v združenom experimente $(\Omega \times \Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$ a ukážeme, že to vedie ku prirodzenej konštrukcii $R(u|v)$.

Keď je stochastický kanál (g, T_g) degenerovaný, $r = p \times q$, vtedy z experimentu $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ do experimentu $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ žiadna relevantná stochastická informácia neprúdi a potom je prirodzené definovať $R(u|v) = \overline{r}(e_2(u)) = \overline{q}(u) = \int u\mathrm{d}q$.

Pre $u \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$ označme $\tilde{u} = e_2(u) \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, t. j., $\tilde{u}(\omega, \xi) = u(\xi), \omega \in \Omega$, $\xi \in \Xi$, a pre $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ označme $\tilde{v} = e_1(v) \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, t. j., $\tilde{v}(\omega, \xi) = v(\omega)$, $\omega \in \Omega, \xi \in \Xi$. Pre $w \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ každá dvojica $((\omega, \xi), a), 0 < a \leq w(\omega, \xi)$ môže byť považovaná za „fuzzy výsledok podporujúci w“, množina $M_w = \{((\omega, \xi), a); 0 < a \leq w(\omega, \xi)\}$ môže byť považovaná za množinu všetkých fuzzy výsledkov podporujúcich w a $\int w\mathrm{d}r$ meria „aká veľká“ je množina M_w. Pre $B \in \mathbf{B}$ položme $\widetilde{\chi_B} = e_2(\chi_B) = \chi_{\Omega \times B} \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$. Potom množina $M_{\chi_B . v} = M_{\widetilde{\chi_B} . \tilde{v}} = M_{\widetilde{\chi_B}} \cap M_{\tilde{v}} = \{((\omega, \xi), a); 0 < a \leq \tilde{v}(\omega, \xi), \xi \in B\}$ môže byť považovaná za „množinu všetkých fuzzy výsledkov podporujúcich $\widetilde{\chi_B}$ za podmienky $\tilde{v}$“.

Pre $0 < \int \tilde{v}\mathrm{d}r = \int v\mathrm{d}p$, definujme

$$R_{\mathbf{B}}(\chi_B|v) = \frac{\int \widetilde{\chi_B} . \tilde{v}\mathrm{d}r}{\int \tilde{v}\mathrm{d}r}$$

Pre každú $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A}), 0 < \int \tilde{v}\mathrm{d}r = \int v\mathrm{d}p$, $R_{\mathbf{B}}(\chi_B|v)$ definuje pravdepodobnostnú mieru $R(.|v)$ na $\mathbf{B}$, $R(.|v)$ je pozorovateľná do $\mathcal{M}(\mathbf{T})$, a teda môže byť jednoznačne rozšírená na pozorovateľnú z $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ do $\mathcal{M}(\mathbf{T})$. Toto rozšírenie ma tvar

$$(*) \qquad R(u|v) = \frac{\int \tilde{u}.\tilde{v}\mathrm{d}r}{\int \tilde{v}\mathrm{d}r}, u \in \mathcal{M}(\mathbf{B}),$$

a predstavuje jedinú prirodzenú definíciu zovšeobecnej podmienej pravdepodobnosti založenej na stochastickom kanáli (g, T_g) a príslušnom g-združenom experimente.

Definícia 35. Nech $(\Omega \times \Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$ je g-združený experiment experimentov $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$. Nech $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A}), 0 < \int \tilde{v}\mathrm{d}r = \int v\mathrm{d}q$. Potom pozorovateľnú $R(.|v) : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{T})$ definovanú pomocou $(*)$ nazývame *pravdepodobnosť na* $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ *podmienená udalosťou* $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$.

Pre zovšeobecnené pravdepodobnostné domény (MV-algebry, Łukasiewiczove klany, D-posety, ...) ďalšia binárna operácia „súčin“ bola študovaná primárne v spojení so združenými pozorovateľnými, stochastickou nezávislosťou, podmienenou strednou hodnotou a podmienenou pravdepodobnosťou, napr. v [57], [12], [62], [35], [58], [43], [42], [15], [36], [9], [40]. Je známe ([58], [42]), že v plnom Łukasiewiczovom klane sa „súčin“ redukuje na zvyčajný bodový súčin funkcií.

Poznamenajme, že konštrukcia zovšeobecnenej podmienej pravdepodobnosti pre MV-algebry a D-posety je založená na operácii súčinu. V [42], [15] pre $u, v \in \mathcal{M}(\mathbf{A}), 0 < \int u\mathrm{d}p$, je $P(v|u)$ definované cez $(\int v.u\mathrm{d}p)/(\int u\mathrm{d}p)$. Naše konštrukcie plne podporujú „podmieňovanie cez súčin“ a, čo je dôležitejšie, tvrdíme, že pre plné Łukasiewiczove klany „podmieňovanie cez súčin“ je kánonické.

Lema 10. *Nech* $R(.|v) : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{T})$ *je pravdepodobnosť na* $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ *podmienená udalosťou* $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A}), 0 < \int \tilde{v}\mathrm{d}r = \int v\mathrm{d}p$*, definovaná pomocou* $(*)$*. Potom pre každé* $u \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$ *platí* $\int \tilde{u}.\tilde{v}\mathrm{d}r = \int g(u).v\mathrm{d}p$ *a* $\int \tilde{v}\mathrm{d}r = \int v\mathrm{d}p$.

Dôkaz. Z $\overline{r} = \overline{p} \circ (\mathrm{id} \otimes g)$ dostaneme $\int \tilde{v}.\tilde{u}\mathrm{d}r = \int (\mathrm{id} \otimes g)(\tilde{v}.\tilde{u})\mathrm{d}p$. Z $(\otimes)$ dostaneme $(\mathrm{id} \otimes g)(\tilde{v}.\tilde{u}) = v.g(u)$. Čiže $\int \tilde{v}.\tilde{u}\mathrm{d}r = \int v.g(u)\mathrm{d}p$. Ďalšie tvrdenie vyplýva z faktu, že $\tilde{v} = \tilde{v}\widetilde{\chi_\Xi}$. □

Nasledujúci špeciálny prípad môže byť zaujímavý. Uvažujme g-združený experiment experimentov $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$, pričom sú tieto experimenty sú identické a $g \equiv \mathrm{id}$ je identická pozorovateľná. Nech $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A}), 0 < \int v\mathrm{d}p$. Potom pre každé $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ platí

$$R(u|v) = \frac{\int u.v\mathrm{d}p}{\int v\mathrm{d}p}$$

a pre $v = \chi_A, u = \chi_B, A, B \in \mathbf{A}, p(A) > 0$ dostaneme

$$R(u|v) = \frac{\int u.v\mathrm{d}p}{\int v\mathrm{d}p} = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}.$$

Nakoniec si všimnime, že zvyčajný prístup k nezávislosti cez podmienenú pravdepodobnosť je kompatibilný s našim prístupom cez stochastické kanály. Naozaj, ak $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je degenerovaná pozorovateľná, tak $\overline{p \times q} = \overline{p} \circ (\mathrm{id} \otimes g)$ a $R(u|v) = \int u\mathrm{d}q$, $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A}), 0 < \int v\mathrm{d}p$.

Viac sa podmienej fuzzy pravdepodobnosti pomocou stochastických kanálov a združených experimentov venuje R. Frič a P. Eliaš v článku [17].

Záver

Predkladaná dizertačná práca sa venovala teórii zovšeobecnenej pravdepodobnosti, v ktorej je klasický pravdepodobnostný priestor nahradený zovšeobecneným pravdepodobnostným priestorom. Ambíciou teórie zovšeobecnenej pravdepodobnosti je do modelu zahrnúť okrem aspektu náhodnosti aj fuzzy aspekt, čím možno na skúmaný jav poskytnúť komplexnejší pohľad. Ide vlastne o jednu z reflexií na návrh L. Zadeha. V teórii figurujú zovšeobecnené náhodné udalosti z množiny $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ všetkých $\mathbf{A}$-merateľných funkcií do jednotkového intervalu, ktorých miera je určená pravdepodobnostným intergrálom vzhľadom k pravdepodobnostnej miere. Z hľadiska metodického prístupu dizertačná práca pokračuje v duchu kategoriálneho prístupu R. Friča a M. Papča k zovšeobecnenej pravdepodobnosti. Práca predstavila súčasné poznanie v predmetnej oblasti a dosiahnuté vlastné výsledky. Práca ponúka prístup k modelovaniu zovšeobecnenej pravdepodobnosti s využitím štruktúry A-posetov, ktorá je izomorfná s D-posetmi, ale má oproti nim určité výhody. V práci bolo vysvetlené kategoriálne odôvodnenie modelovania zovšeobecnenej pravdepodobnosti pomocou merateľných funkcií a pravdepodobnostných integrálov. Opísala stochastickú nezávislosť a závislosť v teórii zovšeobecnenej pravdepodobnosti. Text v rámci možností tejto práce poskytuje pomerne komplexný prehľad o danej problematike. Ďalším krokom bádania v tejto oblasti by mohli byť návrhy konkrétnych príkladov a možných aplikácií.

Nasleduje súhrn „hlavných myšlienok“ predkladanej práce:

- L. Zadeh navrhol nahradiť klasický pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ zovšeobecneným pravdepodobnostným priestorom $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$, kde $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ je množina všetkých merateľných funkcií z $\mathbf{A}$ do $[0{,}1]$ a $\int(.)\mathrm{d}p$ je pravdepodobnostný integrál vzhľadom k miere p. Ale neodôvodnil, prečo práve takýto model.

- Táto práca ukazuje, že ide o minimálne deliteľné kategoriálne rozšírenie kolmogorovského modelu (epireflexia).

- Pravdepodobnostný integrál zachováva prirodzené vlastnosti pravdepodobnostnej miery a vytvára aditívnu linearizáciu náhodných udalostí.

- Načrtnuté sú logické, historické a algebrické výhody používania A-posetov namiesto D-posetov alebo iných štruktúr.

- Je opísaná kategória, v ktorej objektmi sú A-posety merateľných funkcií a morfizmami sú sekvenčne spojité A-homomorfizmy. Toto umožňuje pracovať s pojmami teórie pravdepodobnosti kategoriálne.

- V opísanej kategórii je kánonickým spôsobom definovaná asymetrická stochastická závislosť a nezávislosť a kánonická podmienená pravdepodobnosť, ktorej špeciálnym prípadom je klasická stochastická závislosť a nezávislosť a podmienená pravdepodobnosť.

- Na jednoduchých diskrétnych úlohach je objasnená potreba „deliteľnosti“ udalostí (teda zavedenie fuzzy udalostí $\mathcal{M}(\mathbf{A})$), stochastická nezávislosť a podstata teórie zovšeobecnenej pravdepodobnosti a jej prínos: modelovanie kvantových a (duálne) fuzzy stochastických fenoménov.

Zoznam použitej literatúry

Literatúra

[1] Adámek, J.: Theory of Mathematical Structures. Reidel, Dordrecht, 1983.

[2] Babicová, D.: *Probability integral as a linearization.* Tatra Mountains Mathematical Publ. **72** (2018), 1–15.

[3] Babicová, D., Frič, R.: *Real functions in stochastic dependence.* Tatra Mountains Mathematical Publ. **74** (2019), 17–34.

[4] Barnett, J. H.: Origins of Boolean algebra in the logic of classes: George Boole, John Venn, and C. S. Pierce. Convergence (www.maa.org/publications/periodicals/convergence).

[5] Bernoulli, J. (1713): Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilae reticularis. Basileae: Impensis Thurnisiorum, Fratrum.

[6] Bugajski, S.: Statistical maps I. Basic properties. Math. Slovaca **51** (2001), 321–342.

[7] Bugajski, S.: Statistical maps II. Operational random variables. Math. Slovaca **51** (2001), 343–361.

[8] Butnariu, D. Klement, E. P.: Triangular Norm-Based Measures and Games with Fuzzy Coalitions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[9] Chovanec, F., Drobná, E., Kôpka, F., Nánásiová, O.: Conditional states and independence in D-posets. Soft Comput. **14** (2014), 1027–1034.

[10] Chovanec, F., Frič, R.: States as morphisms. Internat. J. Theoret. Phys. **49** (2010), 3050–3060.

[11] Chovanec, F., Kôpka, F.: D-posets. In: Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures: Quantum Structures. Edited by K. Engesser, D. M. Gabbay and D. Lehmann, Elsevier, Amsterdam, 2007, 367–428.

[12] Di Nola, A., Dvurečenskij, A.: Product MV-algebras. Multi. Val. Logic **6** (2001), 193–215.

[13] Dubois, D., Prade, H.: Fuzzy sets and probability: Misunderstanding, bridges and gaps. In Proceedings of the Second IEEE Conference on Fuzzy Systems. San Francisco. 1993, 1059 – 1068.

[14] Dvurečenskij, A., Pulmannová, S.: New Trends in Quantum Structures, Kluwer Academic Publ. and Ister Science, Dordrecht and Bratislava, 2000.

[15] Dvurečenskij, A., Pulmannová, S.: Conditional probability on σ-MV-algebras. Fuzzy Sets Syst. **155** (2005), 102–118.

[16] Eliaš, P., Frič, R.: Factorization of observables. Internat. J. Theoret. Phys. **56** (2017), 4073–4083.

[17] Eliaš, P., Frič, R.: Conditional probability on full Łukasiewicz tribes. (To appear in Soft Computing, DOI 10.1007/s00500-020-04762-6.)

[18] Frič, R.: On observables. International Journal of Theoretical Physics **39** (2000), 677–686.

[19] Frič, R.: Łukasiewicz tribes are absolutely sequentially closed bold algebras. Czechoslovak Math. J. **52** (2002), 861–874.

[20] Frič, R.: Kvantové štruktúry a teória kategórií. Advances in Electrical and Electronic Engineering **3** (2004), 14—20.

[21] Frič, R.: Remarks on statistical maps and fuzzy (operational) random variables. Tatra Mountains Mathematical Publ. **30** (2005), 21–34.

[22] Frič, R.: Statistical maps: a categorical approach. Math. Slovaca **57** (2007), 41–57.

[23] Frič, R.: On D-posets of fuzzy sets. Math. Slovaca **64** (2014), 545–554.

[24] Frič, R., Papčo, M.: A categorical approach to probability. Studia Logica **94** (2010), 215–230.

[25] Frič, R., Papčo, M.: Fuzzification of crisp domains. Kybernetika **46** (2010), 1009–1024.

[26] Frič, R., Papčo, M.: On probability domains. Internat. J. Theoret. Phys. **49** (2010), 3092–3100.

[27] Frič, R., Papčo, M.: On probability domains II. Internat. J. Theoret. Phys. **50** (2011), 3778–3786.

[28] Frič, R., Papčo, M.: On probability domains III. Internat. J. Theoret. Phys. **54** (2015), 4237–4246.

[29] Frič, R., Papčo, M.: On probability domains IV. Internat. J. Theoret. Phys. **56** (2017), 4084–4091.

[30] Frič, R., Papčo, M.: Upgrading probability via fractions of events. Commun. Math. **24** (2016), 29–41.

[31] Frič, R., Papčo, M.: Probability: from classical to fuzzy. Fuzzy Sets Syst. **326** (2017), 106–114.

[32] Gillies, D.: Philosophical theories of probability. Routledge Taylor and Francis Group, 2000.

[33] Goguen, J. G.: A Categorical Manifesto. Mathematical Structures in Computer Science **1** (1991), 49–67.

[34] Gudder, S.: Fuzzy probability theory. Demonstratio Math. **31** (1998), 235–254.

[35] Jurečková, M.: On the conditional expectation on probability MV-algebras with product. Soft Comput. **5** (2001), 381–385.

[36] Kalina, M., Nánásiová, O.: Conditional states and joint distributions on MV-algebras. Kybernetika **42** (2006), 129–142.

[37] Kolesárová, A., Kováčová, M.: Fuzzy množiny a ich aplikácie. Bratislava: Slovenská technická univerzita, 2004.

[38] Kolmogorov, A. N.: Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, Berlin, 1933.

[39] Kosko, B.: Fuzziness vs. probability. Int. J. General Systems **17** (1990), 211–240.

[40] Kôpka, F.: Quasi product on Boolean D-posets. Int. J. Theor. Phys. **47** (2008), 26–35.

[41] Kôpka, F., Chovanec, F.: D-posets. Math. Slovaca **44** (1994), 21–34.

[42] Kroupa, T.: Conditional probability on MV-algebras. Fuzzy Sets Syst. **149** (2005), 369–381.

[43] Kroupa, T.: Many-dimensional observables on Łukasiewicz tribe: constructions, conditioning and conditional independence. Kybernetika **41** (2005), 451–468.

[44] Kvasz, L.: Matematika a teológia. Obzory matematiky, fyziky a informatiky **4** (2002), 32–39.

[45] Ladovský, T.: Prehľad porovnania fuzzy čísel. In *Posterus. Portál pre odborné publikovanie.* 2011, roč. 4, č. 7, s. 11 – 16. `http://www.posterus.sk/?p=11018` (cit. dňa 25. 8. 2015)

[46] Loève M.: Probability theory, D. Van Nostrand, Inc., Princeton, New Jersey, 1963.

[47] Łukasiewicz, J.: O logice trójwartościowej. Ruch filozoficzny **5** (1970), 170–171. Anglický preklad: On three-valued logic. In L. Borkowski (ed.), Selected works by Jan Łukasiewicz, North–Holland, Amsterdam, 1970, 87–88.

[48] Mesiar, R.: Fuzzy sets and probability theory. Tatra Mountains Mathematical Publ. **1** (1992), 105–123.

[49] Mundici, D.: A geometric approach to MV-algebras, In: On Logical, Algebraic and Probabilistic Aspects of Fuzzy Set Theory, Dedicated to Erich Peter Klement, (R. Mesiar et al. Eds.), Springer, Berlin, 2016, 57-70.

[50] Navara, M.: Probability theory of fuzzy events. In: E. Montseny, P. Sobrevilla (eds.), Fourth Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology and 11 Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications, Universitat Polit ecnica de Catalunya, Barcelona, Spain, 2005, 325–329.

[51] Navara, M.: Axiomatic approach to probability of fuzzy events. In: B. De Baets, R. Mesiar, S. Saminger-Platz, and E.P. Klement (eds.), Functional Equations and Inequalities, Johannes Kepler University, Linz, Austria, 2016, 66–72.

[52] Papčo, M.: On measurable spaces and measurable maps. Tatra Mountains Mathematical. Publ. **28** (2004), 125–140.

[53] Papčo, M.: On fuzzy random variables: examples and generalizations. Tatra Mountains Mathematical Publ. **30** (2005), 175–185.

[54] Papčo, M.: On effect algebras. Soft Comput. **12** (2008), 373–379.

[55] Papčo, M.: Fuzzification of probabilistic objects. 8th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2013), doi:10.2991/eusat.2013.10 (2013), 67–71.

[56] Papčo, M.: Kategoriálny prístup k pravdepodobnosti: Habilitačná práca. Banská Bystrica: Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici. 2015.

[57] Riečan, B.: On the product MV-algebras. Tatra Mountains Mathematical Publ. **16** (1999), 143–149.

[58] Riečan, B., Mundici, D.: Probability on MV-algebras. In: Handbook of Measure Theory, Vol. II (Editor: E. Pap), North-Holland, Amsterdam, 2002, 869–910.

[59] Riečan, B., Neubrunn, T.: Integral, Measure, and Ordering. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht-Boston-London, 1997.

[60] Skřivánek, V., Frič, R.: Generalized random events, Internat. J. Theoret. Phys. **54** (2015), 4386–4396.

[61] Štiberová, D.: Trojuholníkové normy a konormy v štatistike: Diplomová práca. Ružomberok: Katolícka univerzita v Ružomberku. 2016.

[62] Vrábelová, M.: A note on the conditional probability on product MV-algebras. Soft Comput. **4** (2000), 58–61.

[63] Zadeh, L. A.: Fuzzy sets. Information and Control **8** (1965), 338–353.

Kópie publikovaných článkov

1. Babicová, D.: *Probability integral as a linearization.* Tatra Mountains Mathematical Publ. **72** (2018), 1–15.
2. Babicová, D. and Frič, R.: *Real functions in stochastic dependence.* Tatra Mountains Mathematical Publ. **74** (2019), 17–34.

sciendo

TATRA MOUNTAINS
Mathematical Publications

DOI: 10.2478/tmmp-2018-0017
Tatra Mt. Math. Publ. **72** (2018), 1–15

PROBABILITY INTEGRAL AS A LINEARIZATION

Dušana Babicová

Slovak Academy of Sciences, Košice, SLOVAKIA

ABSTRACT. In fuzzified probability theory, a classical probability space $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ is replaced by a generalized probability space $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\,\mathrm{d}p)$, where $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ is the set of all measurable functions into [0,1] and $\int(.)\mathrm{d}p$ is the probability integral with respect to p. Our paper is devoted to the transition from p to $\int(.)\,\mathrm{d}p$. The transition is supported by the following categorical argument: there is a minimal category and its epireflective subcategory such that $\mathbf{A}$ and $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ are objects, probability measures and probability integrals are morphisms, $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ is the epireflection of $\mathbf{A}$, $\int(.)\,\mathrm{d}p$ is the corresponding unique extension of p, and $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ carries the initial structure with respect to probability integrals.

We discuss reasons why the fuzzy random events are modeled by $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ equipped with pointwise partial order, pointwise Łukasiewicz operations (logic) and pointwise sequential convergence. Each probability measure induces on classical random events an additive linear preorder which helps making decisions. We show that probability integrals can be characterized as the additive linearizations on fuzzy random events, i.e., sequentially continuous maps, preserving order, top and bottom elements.

Introduction

In [37], L. A. Zadeh has proposed to replace a classical probability space $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ with a fuzzified probability space $\big(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\,\mathrm{d}p\big)$, where $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ is the set of all measurable functions into [0,1] and $\int(.)\,\mathrm{d}p$ is the probability integral with respect to p. Fundamental results on fuzzified probability theory (motivation, definitions of notions, technical results, applications, categorical

---

2010 Mathematics Subject Classification: 60A86, 60A05, 06D72, 18A20.
Keywords: generalized probability, measurable function, fuzzy random event, D-poset, effect algebra, A-poset, IA-poset, Łukasiewicz tribe, epireflection, probability integral, linearization.
This work was supported by the Slovak Scientific Grant Agency under the project VEGA 2/0031/15 and the Slovak Research and Development Agency under the contract No. APVV--16–0073. The author is a PhD student of Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics.

approach) can be found in [4], [5], [12]–[14], [16], [19]–[21], [24], [27], [32], [33], and in papers cited therein.

In [29], M. Navara observed that no justification to define the probability of a fuzzy event $f \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ by the formula $\int(f)\,\mathrm{d}p$ was given by Zadeh and he discussed two distinct approaches to generalized probability, probability on tribes and probability on MV-algebras with products [34]. In our contribution, we present another supportive argument for the transition from $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ to $\big(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\,\mathrm{d}p\big)$: categorical approach to generalized probability [17], [20]. Indeed, there is a minimal category and its epireflective subcategory such that $\mathbf{A}$ and $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ are objects, probability measures and probability integrals are morphisms, $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ is the epireflection [1] of $\mathbf{A}$ and $\int(.)\,\mathrm{d}p$ is the corresponding unique extension of p. Each object $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ is equipped with the multivalued Łukasiewicz logic, carries the initial structure with respect to probability integrals, and each probability integral can be characterized as the additive linearization of fuzzy random events.

The idea of quantification of uncertainty about the future development (as a number p, $0 \le p \le 1$) goes back to Jacob Bernoulli: "The probability namely is the degree of certainty and differs from it as a part from the whole" (see [3]). The quantification of future events (assigning a number) induces a linear (pre)order on the events and helps to conjecture (make decisions). This explains our understanding of **linearization**. Besides having philosophical and methodological aspects, it has contributed to "mathematization" of probability.

Kolmogorov has "mathematized" probability theory (via axioms) in [25].

- At the beginning we have a **probability space** $(\Omega, \mathbf{A}, p)$, where Ω is the set of all outcomes of a random experiment, $\mathbf{A}$ is a σ-field of subsets of Ω, each $A \in \mathbf{A}$ is called an **event**, events of the form $A = \{\omega\}$, $\omega \in \Omega$, are called elementary events;
- $p : \mathbf{A} \to [0, 1]$ is a normalized σ-additive measure called **probability**, $p(A)$ measures how "big" is $A \in \mathbf{A}$ in comparison to Ω; the most important example is $(R, \mathbf{B}_R, p)$, where R are the real numbers, $\mathbf{B}_R$ is the real Borel σ-field, and p is a probability on $\mathbf{B}_R$.

Kolmogorov's axiomatization of probability was actually an attempt to solve the sixth problem of D. Hilbert: to axiomatize physics, because probability was considered as part of physics. From the viewpoint of category theory, Kolmogorov's probability has a weak point: it uses Boolean operations on events, but probability measures do not preserve these operations. The transition from $\mathbf{A}$ to $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ is a minimal extension of the field of events so that basic maps become morphisms and the extended probability models the following quantum phenomenon: a classical outcome (point) can be mapped to a genuine probability measure. In fact (cf. [18], [22]), this is related to the divisibility of random events (each fuzzy random event $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ is divisible in $\mathcal{M}(\mathbf{A})$, i.e., for each positive natural number k we have $u/k \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$, but classical random events from $\mathbf{A}$ fail to be divisible in $\mathbf{A}$).

In what follows, systems of functions $\mathcal{X} \subseteq [0,1]^\Omega$ are equipped with the natural pointwise partial order and pointwise convergence of sequences.

Observe that the Lebesgue Dominated Convergence Theorem, LDCT in short, implies that each probability integral $\int (.)\,\mathrm{d}p$ on $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ (hence each probability measure p on $\mathbf{A}$) is sequentially continuous. Consequently, the σ-additivity of a normalized additive measure is equivalent to sequential continuity (not only to monotone continuity, as usually claimed). For this reason, we consider only sequentially continuous linearizations.

Definition 0.1. A sequentially continuous map $L\colon \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow [0,1]$, preserving order, top and bottom elements, is called a linearization of $\mathcal{M}(\mathbf{A})$. If for u, $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A}), u(\omega) + v(\omega) \leq 1, \omega \in \Omega$, we have $L(u+v) = L(u) + L(v)$, the L is said to be additive.

Phenomena in quantum physics motivate studies of generalized probability and mathematical quantum structures. In order to describe such phenomena, we seek suitable generalizations of classical models [4], [5], [24]. Random events in classical probability theory [25] can be generalized in different ways [4], [5], [24], [27], [31], [34]. For example, generalized random events are modeled by quantum logics, effect algebras, difference posets, etc. [7], [9], [26], [35].

We use another structure called A-posets which is isomorphic to effect algebras and D-posets [36]. It is defined in terms of a partial order and a partial operation “addition” which generalizes the original “disjoint disjunction” introduced by G. Boole (cf. [2]) and hence it has a more direct logical interpretation than the difference in D-posets [7], [26].

1. Why probability integral

In this section we outline arguments from which it follows that probability integral is the proper quantification of fuzzy random events. Technical details (definitions and propositions) will be presented in the last section.

L. A. Zadeh in his pioneering paper [37] has proposed to extend random events, represented by the indicator functions of a sigma-field $\mathbf{A}$ of sets, to fuzzy random events, represented by the set $\mathcal{M}(\mathbf{A}) \subset [0,1]^\Omega$ of all measurable fuzzy sets, and to consider the probability integral $\int (.)\,\mathrm{d}p$ as the extension of the probability measure p. Further, he proposed max, min and the usual complementation as operations on fuzzy random events. In the follow-up papers, Zadeh concentrates on applications in engineering and soft computing.

A thorough study of fuzzified probability can be found in [29]. As stated by Navara, $\int(.)\,\mathrm{d}p$ is a natural extension of p, but no justification was given by Zadeh and Navara discussed two distinct approaches to generalized probability, probability on tribes and probability on MV-algebras with products. Our goal is to describe a more complex reason based on the categorical approach to probability. It can be summarized as follows.

Claim. *There is a suitable category such that*

- $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ *and* $\big(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\,\mathrm{d}p\big)$ *are models of probability theory the basic notions of which are defined within the category in question;*
- $\mathbf{A}$, $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *are objects and* p, $\int(.)\,\mathrm{d}p$ *are morphisms. Moreover,* p *and* $\int(.)\,\mathrm{d}p$ *are linearizations characterized by a fundamental property of probability–additivity;*
- $\mathbf{A}$ *and* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *carry the initial structure with respect to all probability measures on* $\mathbf{A}$ *and with respect to of all probability integrals on* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$*, respectively.*
- $\big(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\,\mathrm{d}p\big)$ *is a "minimal" extension of* $(\Omega, \mathbf{A}, p)$*. The minimality is based on natural properties of fuzzy random events and the extension can be characterized as an epireflection.*

Let us point out some requirements concerning the category in question.

Requirements.

- *Objects are sets equipped with a suitable structure.*
- *Morphisms are "structure preserving maps".*
- *Both* $\mathbf{A}$ *(boolean structure) and* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *(fuzzy structure) have to be equipped with "the same" structure.*
- *Each probability measure* $p\colon \mathbf{A} \longrightarrow [0,1]$ *and each probability integral has to be a morphism, hence* $\mathbf{A}$, $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *and* $[0,1]$ *(equipped with a suitable structure) have to be objects of the corresponding category.*
- *Objects of the form* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *have to form a distinguished subcategory.*

Let us recall (cf. [19]) why $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ is a natural candidate to model fuzzy random events. Let $\mathbf{A}$ be a σ-field of subsets of Ω. Denote a_Ω, $a \in [0,1]$, the constant function such that $a_\Omega(\omega) = a$, $\omega \in \Omega$. Then $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ is the smallest of all subsets $\mathcal{X} \subseteq [0,1]^\Omega$ containing $\mathbf{A}$ (indicator functions of sets in $\mathbf{A}$) and closed with respect to negations (if $u \in \mathcal{X}$, then $(1_\Omega - u) \in \mathcal{X}$), pointwise suprema, pointwise sequential limits, and divisible $((1/n)_\Omega \in \mathcal{X}$, $n \in N^+)$. So, $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ has the necessary properties of a fuzzification of $\mathbf{A}$ and, as we shall see, it can be equipped with the appropriate structure (multivalued Łukasiewicz logic). Further, there is a one-to-one correspondence between σ-fields and measurable functions into [0,1] and a one-to-one correspondence between probability measures and probability integrals. As indicated above, the correspondence is functorial (epireflection). Finally, let $\mathbf{T} = \{\emptyset, \Omega\}$ be the trivial field of sets, where Ω is a singleton. Since each function in $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ is determined by a single number in [0,1], hence [0,1] can be viewed as $\mathcal{M}(\mathbf{T})$.

To sum up, the transition from $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ to $\big(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\,\mathrm{d}p\big)$ has a categorical background: $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ is a categorical extension of $\mathbf{A}$ and $\int(.)\,\mathrm{d}p$ is the corresponding unique categorical extension (epireflection) of p.

2. Why A-posets

As explicitly stated in [10], any generalized probability theory based on (algebraic) measure theory should be restricted to events for which "there are enough (generalized) probability measures". This leads to ID-posets, i.e., D-posets of functions, the structure of which is determined by sequentially continuous D-homomorphisms (see [16], [17], [30]). On the one hand, fuzzified probability theory by R. Frič and M. Papčo is based on the category of ID-posets, i.e., it uses the language of partial order and difference, but on the other hand, fuzzy random events are modeled via bold algebras and Łukasiewicz operations (generalizations of Boolean disjunction, negation and conjunction). Consequently, some mathematical and interpretational effort is needed to pass from "difference" to "plus".

Therefore, at ISCAMI 2014, V. Skřivánek has introduced A-posets and the corresponding category of fuzzy events which serves as an alternative reference category for the fuzzification of classical Kolmogorov's probability theory (see [36]). A-posets, D-posets and effect algebras are isomorphic structures (see [36]), but A-posets lead more directly to the Łukasiewicz logic. A-posets are defined in terms of a partial order and a partial operation "addition" and they are motivated by the original approach to logic via "disjoint disjunction" of G. Boole [2]. The resulting partial operations of disjunction and conjunction (along with negation) act on generalized random events and lead to a smooth transition from the classical to fuzzified probability: their extension to binary operations results in the usual Łukasiewicz operations on fuzzy random events.

Definition 2.1. An A-poset is a system $(S, \leq, 0, 1, \oplus)$ consisting of partial ordered set S with top element 1 and bottom element 0 and a partial binary operation $\oplus$ such that:

(A_1) If $a \oplus b$ is defined, then $b \oplus a$ is defined and $a \oplus b = b \oplus a$.

(A_2) If $(a \oplus b) \oplus c$ is defined, then $a \oplus (b \oplus c)$ is defined and $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.

(A_3) For each $a \in S$ there exists a unique $a^c \in S$ such that $a \oplus a^c = 1$.

(A$_4$) If $a \oplus b$ is defined, $a_1 \leq a$ and $b_1 \leq b$, then $a_1 \oplus b_1$ is defined and $a_1 \oplus b_1 \leq a \oplus b$.

Observe that $a \oplus 0 = a$ and (A_4) is equivalent to "$a \oplus b$ is defined if and only if $a \leq b^c$".

If no confusion can arise, then an A-poset $(S, \leq, 0, 1, \oplus)$ will be condensed to S.

Definition 2.2. Let S_1 and S_2 be A-posets and let h be a map on S_1 into S_2 preserving the order, constants, and addition. Then h is said to be an A-homomorphism.

Example 2.3. Let $\mathbf{A}$ be a field of subsets of Ω. Then $\mathbf{A}$ can be reorganized into an A-poset as follows:

(i) $\mathbf{A}$ is partially ordered by inclusion.
(ii) $\emptyset$ and Ω represent the bottom element and the top element, respectively.
(iii) For $A \in \mathbf{A}$ define $A^c = \Omega \setminus A$.
(iv) For $A, B \in \mathbf{A}$ define $A \oplus B = A \cup B$ if and only if $A \cap B = \emptyset$.

Clearly, axioms (A$_1$)–(A$_4$) are satisfied.

Example 2.4. Let $\mathcal{X} \subseteq [0,1]^\Omega$ be a system of functions on Ω into [0,1] such that the constant functions $0_\Omega, 1_\Omega$ belong to $\mathcal{X}$, if $u \in \mathcal{X}$ then $1_\Omega - u \in \mathcal{X}$, if $u, v \in \mathcal{X}$ and $v \leq 1_\Omega - u$ then $u + v \in \mathcal{X}$.

(i) For $u \in \mathcal{X}$ define $u^c = 1_\Omega - u$.
(ii) For $u, v \in \mathcal{X}, v \leq 1_\Omega - u$, define $u \oplus v = u + v$.

Then $\mathcal{X}$ equipped with the pointwise partial order becomes an A-poset. Let $\mathbf{A}$ be a σ-field of subsets of Ω. Denote $s(\mathbf{A})$ the simple functions in $\mathcal{M}(\mathbf{A})$, i.e., functions of the form $\sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$, where $c_i \in [0,1]$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ are disjoint subsets in $\mathbf{A}$ covering Ω, and n is a natural number. Then $s(\mathbf{A})$ and $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ (hence also [0,1] considered as $\mathcal{M}(\mathbf{T})$) can be viewed as A-posets. Observe that $s(\mathbf{A})$ is divisible. Let $\mathbf{A}$ be a σ-field of subsets of Ω. Denote e_1 the embedding of $\mathbf{A}$ into $s(\mathbf{A})$ and denote e_2 the embedding of $s(\mathbf{A})$ into $\mathcal{M}(\mathbf{A})$. Clearly, e_1, e_2, and their composition $e_2 \circ e_1$ are A-morphisms.

In what follows, the composition $e_2 \circ e_1$ will be denoted as *id*. Clearly, the A-homomorphisms e_1, e_2, and the composition $id = e_2 \circ e_1$ are sequentially continuous with respect to the pointwise convergence of functions.

Lemma 2.5. *Let* $\mathbf{A}$ *and* $\mathbf{B}$ *be fields of subsets of* Ω *and* Ξ*, respectively. Let* h *be an A-homomorphism of* $\mathbf{B}$ *into* $\mathbf{A}$*, considered as A-posets. Then* h *is a Boolean homomorphism.*

Proof. Clearly, $h(\Xi) = \Omega$ and $h(\emptyset) = \emptyset$. Let $B_1, B_2 \in \mathbf{B}$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Then $h(B_1 \cup B_2) = h(B_1 \oplus B_2) = h(B_1) \oplus h(B_2) = h(B_1) \cup h(B_2)$ and $h(B_1) \cap h(B_2) = \emptyset$. Consequently, $h\big(B \cup (\Xi \setminus B)\big) = \Omega = h(B) \cup h(\Xi \setminus B)$, where $h(B) \cap h(\Xi \setminus B) = \emptyset$ and hence $h(B^c) = h(B)^c$. Further, for $B_1, B_2 \in \mathbf{B}$ the set $B_1 \cup B_2$ is the union of three disjoint sets $B_1 \setminus B_2$, $B_1 \cap B_2$ and $B_2 \setminus B_1$, $h(B_1)$ is the disjoint union of $h(B_1) \setminus h(B_1 \cap B_2)$ and $h(B_1 \cap B_2)$, $h(B_2)$ is the disjoint union of $h(B_2) \setminus h(B_1 \cap B_2)$ and $h(B_1 \cap B_2)$. Necessarily, h preserves the union of two sets. From De Morgan's laws it follows that h preserves also the intersection of two sets. Thus h is a Boolean homomorphism. □

Recall the notion of a categorical product of two objects. An object A together with two morphisms (called projections) $pr_i \colon A \longrightarrow A_i$, $i = 1, 2$, is called the product of two objects A_1 and A_2, called factors, if for each object B and each two morphisms $h_i \colon B \longrightarrow A_i$, $i = 1, 2$, there exists a unique morphism $h \colon B \longrightarrow A$ such that $pr_i \circ h = h_i$, $i = 1, 2$. The product of an indexed family of factors is defined analogously. If the product exists, then it is unique (up to an isomorphism).

Denote $\mathbb{A}$ the category with A-posets as objects and A-homomorphisms as morphisms.

Lemma 2.6. *The category $\mathbb{A}$ has products.*

Proof. Let A_1 and A_2 be A-posets. Let A be the set of all pairs (a_1, a_2), $a_i \in A_i$, $i = 1, 2$. Define projections $pr_i \colon A \longrightarrow A_i$, $i = 1, 2$, in the usual way: $pr_1(a_1, a_2) = a_1$ and $pr_2(a_1, a_2) = a_2$. Define the A-poset structure on A pointwise. It is easy to see that A together with projections $pr_i, i = 1, 2$, is the categorical product of A_1 and A_2. The product of an indexed family of A-posets is constructed analogously. □

3. Generalized random events

In [36] R. Frič and V. Skřivánek introduced a fuzzified probability on A-posets of functions. The resulting generalized random events form a probability domain (cf. [16], [19], [20]) cogenerated by the closed unit interval $I = [0, 1]$, considered as an A-poset. Such probability domains are analogous to ID-posets (cf. [16], [30], [31]) but, unlike the partial operation difference $\ominus$ in an ID-poset $\mathcal{X} \subseteq I^X$, the partial operation addition $\oplus$ has a clear logical interpretation: "disjunction for disjoint fuzzy events".

The Boolean logic can be extended to fuzzy events in many ways. In particular, via the Łukasiewicz logic. As pointed out by D. Mundici in [28], among all continuous t-norms, Łukasiewicz conjunction is the only one yielding a logic with a continuous implication connective.

Definition 3.1. An A-poset of functions whose values are in $[0,1]$ is said to be an IA-poset. A sequentially continuous A-homomorphism of an IA-poset $\mathcal{X} \subseteq I^X$ into I is said to be a state. A sequentially continuous A-homomorphism of an IA-poset $\mathcal{X} \subseteq I^X$ into an IA-poset $\mathcal{Y} \subseteq I^Y$ is said to be an observable.

Definition 3.2. Łukasiewicz tribe is a system $\mathcal{X} \subseteq [0,1]^\Omega$ closed with respect to pointwise sequential limits, containing the constant functions 0_Ω, 1_Ω and closed with respect to the usual Łukasiewicz operations disjunction, conjunction, negation defined pointwise: for $u, v \in \mathcal{X}$ and $\omega \in \Omega$) we put

- $(u \oplus v)(\omega) = u(\omega) \oplus v(\omega) = \min\{1, u(\omega) + v(\omega)\}$;
- $(u \odot v)(\omega) = u(\omega) \odot v(\omega) = \max\{0, u(\omega) + v(\omega) - 1\}$;
- $u^*(\omega) = 1 - u(\omega)$.

Obviously, each σ-field $\mathbf{A}$ and the corresponding measurable functions $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ are canonical examples of Łukasiewicz tribes (see also [11]). As pointed out in [22], the upgrading of classical probability lies in the divisibility of $\mathcal{M}(\mathbf{A})$.

Let $\mathcal{X} \subseteq [0,1]^\Omega$ be a Łukasiewicz tribe. Then there exists a unique σ-field $\mathbf{A}_\mathcal{X}$ of subsets of Ω such that $\mathbf{A}_\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}(\mathbf{A}_\mathcal{X})$. Moreover, $\mathcal{X} = \mathcal{M}(\mathbf{A}_\mathcal{X})$ if and only if $\mathcal{X}$ contains all constant functions $r_\Omega, r \in [0,1]$ ([6], [35]). Łukasiewicz tribes of the form $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ are said to be a **full**. We say that two Łukasiewicz tribes $\mathcal{X} \subseteq [0,1]^\Omega$ and $\mathcal{Y} \subseteq [0,1]^\Omega$ are equivalent whenever $\mathbf{A}_\mathcal{X} = \mathbf{A}_\mathcal{Y}$. Clearly, $\mathbf{A}_\mathcal{X}$ and $\mathcal{M}(\mathbf{A}_\mathcal{X})$ are equivalent. Further, $\mathbf{A}_\mathcal{X}$ and $\mathcal{M}(\mathbf{A}_\mathcal{X})$ are **extremal**, $\mathbf{A}_\mathcal{X}$ is the bottom element and $\mathcal{M}(\mathbf{A}_\mathcal{X})$ is the top element in the equivalence class in question.

If we identify $A \subseteq \Omega$ and its indicator function $\chi_A \in \{0,1\}^\Omega$, $\chi_A(\omega) = 1$ for $\omega \in A$ and $\chi_A(\omega) = 0$ for $\omega \in A^c$, then each indicator function can be viewed as a Boolean propositional function "ω belongs to A" and each measurable function can be viewed as a fuzzy propositional function.

Observe that G. Boole used partial union. He did not introduce Boolean algebra, it was introduced later [2]. Accordingly, the A-poset of fuzzy sets is a natural fuzzification of the original Boole's idea.

Denote by $\mathbb{IA}$ the category having IA-posets as objects and sequentially continuous A-homomorphisms as morphisms. To deal with the transition from $\mathbf{A}$ to $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ in terms of category theory, we introduce the following subcategories of $\mathbb{IA}$: the objects of $\mathbb{LIA}$ are Łukasiewicz tribes, the objects of $\mathbb{ELIA}$ are extremal Łukasiewicz tribes (bottom or top elements in an equivalence class), and the objects of $\mathbb{FELIA}$ are full Łukasiewicz tribes.

Claims.

- *Basic notions of the classical probability theory: random events and Boolean logic operations, random variables, and probability measures can be defined within* $\mathbb{ELIA}$.

- *Via the epireflection, to each classical probabilistic notion there corresponds its "fuzzified" notion within* $\mathbb{FELIA}$.
- *All "stochastic maps" become morphisms in* $\mathbb{FELIA}$.
- *Basic constructions in probability theory become categorical.*
- $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *carries the initial A-poset structure with respect to states, i.e., morphisms into* $[0,1] = \mathcal{M}(\mathbf{T})$ *(cogenerator).*

The next lemma is a categorical bookkeeping.

Lemma 3.3. *Let* $\mathcal{X}_t, t \in T$, *be an indexed family of A-posets and let* $\mathcal{X}$ *be product of* $\mathcal{X}_t, t \in T$.

(i) *Let each* $\mathcal{X}_t$ *be an object of* $\mathbb{LIA}$. *Then* $\mathcal{X}$ *is an object of* $\mathbb{LIA}$.

(ii) *Let each* $\mathcal{X}_t$ *be an object of* $\mathbb{FELIA}$. *Then* $\mathcal{X}$ *is an object of* $\mathbb{FELIA}$.

Proof. (i) Each $\mathcal{X}_t$ is a Łukasiewicz tribe consisting of functions on a set Ω_t into [0,1], $t \in T$. Let Ω be their disjoint union. Then each $u \in \mathcal{X}$ is represented as a function on Ω into [0,1] "disjointly glued" of functions from $\mathcal{X}_t$, $t \in T$, and $\mathcal{X}$ is equipped with the pointwise A-structure. Clearly, $\mathcal{X}$ is an object of $\mathbb{LIA}$.

(ii) follows from (i). □

4. Epireflection

As outlined in introductory sections, the transition from $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ to $\big(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\,\mathrm{d}p\big)$ can be described in terms of a categorical epireflection. In this section we state and prove the underlying assertions.

In [15], it has been proved that the category of full Łukasiewicz tribes is an epireflective subcategory of the category of bold algebras and sequentially continuous D-homomorphisms (see also [23]). This is a rather general assertion and the proof of it uses powerful machinery of abstract analysis. On the one hand, the transition from $\mathbf{A}$ to $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ and from p to $\overline{p} = \int(.)\,\mathrm{d}p$ is a corollary of this general assertion, on the other hand, our assertions and their proofs are rather transparent and appropriate to describe the transition from the classical probability to its "minimal" fuzzification within $\mathbb{ELIA}$.

Lemma 4.1. *Let* $\mathbf{A}$ *be a* σ*-field of subsets of* Ω, *let* $p\colon \mathbf{A} \longrightarrow [0,1]$ *be a probability measure, and let* $\overline{p} = \int(.)\,\mathrm{d}p$ *be the corresponding probability integral on* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$. *Then*

(i) $\overline{p}$ *can be viewed as a sequentially continuous A-homomorphism of* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *into* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$;

(ii) p *can be viewed as a sequentially continuous A-homomorphism of* $\mathbf{A}$ *into* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$.

Proof.

(i) We consider [0,1] as $\mathcal{M}(\mathbf{T})$. Due to the LDCT $\overline{p}$ is sequentially continuous. Since each probability integral, as a mapping of $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ into $\mathcal{M}(\mathbf{T})$, preserves order, constants and addition, the assertion holds true.

(ii) Since p is the restriction of $\overline{p}$ to the A-poset $\mathbf{A}$, (ii) follows from (i). □

Lemma 4.2. *Let* $\mathbf{A}$ *be a* σ*-field of subsets of* Ω *and let* h *be a sequentially continuous A-homomorphism of* $\mathbf{A}$ *into* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$*. Then* h *is a probability measure.*

Proof. Consider h as a mapping of $\mathbf{A}$ into [0,1]. Clearly, $h(\emptyset) = 0$, $h(\Omega) = 1$ and $h(A \cup B) = h(A) + h(B)$ whenever $A \cap B = \emptyset$. Since h is sequentially continuous, it follows that h is σ-additive and hence a probability measure on $\mathbf{A}$. □

Consequently, probability measures are exactly sequentially continuous A-homomorphisms of σ-fields of sets into $\mathcal{M}(\mathbf{T})$.

Lemma 4.3. *Let* $\mathbf{A}$ *and* $\mathbf{B}$ *be fields of subsets of* Ω *and* Ξ*, respectively.*

(i) *Let* g *and* h *be a sequentially continuous A-homomorphisms of* $s(\mathbf{A})$ *into* $\mathcal{M}(\mathbf{B})$*. If* $g(A) = h(A)$ *for all* $A \in \mathbf{A}$*, then* $g = h$*.*

(ii) *Let* g *and* h *be a sequentially continuous A-homomorphisms of* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *into* $\mathcal{M}(\mathbf{B})$*. If* $g(A) = f(A)$ *for all* $A \in \mathbf{A}$*, then* $g = h$*.*

(iii) *The sequentially continuous A-homomorphism* $id\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ *is an epimorphism.*

Proof.

(i) Let l be a positive natural number. Then for each natural number $k, k \leq l$, and each $A \in \mathbf{A}$ we have $g\big((k/l)\chi_A\big) = (k/l)g(\chi_A) = (k/l)h(\chi_A) = h\big((k/l)\chi_A\big)$. Consequently h and g coincide on all $\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i} \in s(\mathbf{A})$, where $c_i, i = 1, 2, \ldots, n$, are rational numbers in [0,1]. Since g and h are sequentially continuous, it follows that $g = h$.

(ii) It follows from (i) that g and h coincide on $s(\mathbf{A})$. The assertion follows from the fact that each $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ is a limit of a sequence $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, where $u_n \in s(\mathbf{A})$ and $g(u_n) = h(u_n)$. Indeed, g and h are sequentially continuous and hence $g(u) = \lim_{n\to\infty} g(u_n) = \lim_{n\to\infty} h(u_n) = h(u)$.

(iii) Let g and h be a sequentially continuous A-homomorphisms of $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ into $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ such that $g(A) = f(A)$ for all $A \in \mathbf{A}$. Then $g \circ id = h \circ id$. We have to verify that $g = h$. But that is exactly what (ii) claims.

□

Lemma 4.4. *Let* $\mathbf{A}$ *be a* σ*-field of subsets of* Ω *and let* h *be a sequentially continuous A-homomorphism of* $\mathbf{A}$ *into* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$*. Then there exists a unique sequentially continuous A-homomorphism* h_s *of* $s(\mathbf{A})$ *into* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ *extending* h *over* $s(\mathbf{A})$*.*

Proof. According to Lemma 4.2, h is a probability measure on $\mathbf{A}$. Denote $\overline{h} = \int(.)\,\mathrm{d}h$ the corresponding probability integral on $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ and denote h_s the restriction of $\overline{h}$ to $s(\mathbf{A})$. It follows from Lemma 4.1 that $\overline{h}$ is a sequentially continuous A-homomorphism on $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ into $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ and hence h_s is a sequentially continuous A-homomorphism on $s(\mathbf{A})$ into $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ which extends h. By Lemma 4.3, h_s is uniquely determined. ☐

Lemma 4.5. *Let $\mathbf{A}$ be a σ-field of subsets of Ω and let h_s be a sequentially continuous A-homomorphism of $s(\mathbf{A})$ into $\mathcal{M}(\mathbf{T})$. Then there exists a unique sequentially continuous A-homomorphism h_m of $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ into $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ extending h_s over $\mathcal{M}(\mathbf{A})$.*

Proof. It follows from Lemma 4.4 that there is a unique probability measure h on $\mathbf{A}$ such that h_s is the restriction of the probability integral $\int(.)\,\mathrm{d}h$ on $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ to $s(\mathbf{A})$. It suffices to put $h_m = \int(.)\,\mathrm{d}h$. By Lemma 4.3, h_m is determined uniquely. ☐

Theorem 4.6. *Let $\mathbf{A}$ be a σ-field of subsets of Ω and let h be a sequentially continuous A-homomorphism of $\mathbf{A}$ into $\mathcal{M}(\mathbf{T})$. Then there exists a unique sequentially continuous A-homomorphism h_m of $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ into $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ extending h over $\mathcal{M}(\mathbf{A})$.*

Proof. It follows from the previous lemmas that h is a probability measure on $\mathbf{A}$ and h_m is exactly the probability integral $\overline{h} = \int(.)\,\mathrm{d}h$ on $\mathcal{M}(\mathbf{A})$, which is uniquely determined. ☐

Corollary 4.7. *Let $\mathbf{A}$ be a σ-field of sets and let L be a map of $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ into $[0,1]$. Then the following are equivalent*

(i) *L is an additive linearization.*
(ii) *There exists a unique probability measure p on $\mathbf{A}$ such that $L = \int(.)\,\mathrm{d}p$.*

Theorem 4.8. *Let $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ be fields of subsets of Ω and Ξ, respectively. Let h be a sequentially continuous A-homomorphism of $\mathbf{A}$ into $\mathcal{M}(\mathbf{B})$. Then there exists a unique sequentially continuous A-homomorphism h_m of $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ into $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ extending h over $\mathcal{M}(\mathbf{A})$.*

Proof. Let $[0,1]^{\Xi}$ be the categorical power of $[0,1] = \mathcal{M}(\mathbf{T})$, let $pr_\xi, \xi \in \Xi$, be the projection of $[0,1]^{\Xi}$ to its ξth factor, let e be the embedding of $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ into $[0,1]^{\Xi}$, and let id be the embedding of $\mathbf{A}$ into $\mathcal{M}(\mathbf{A})$. Then the composition $p_\xi = pr_\xi \circ e \circ h$ is a probability measure on $\mathbf{A}$ and, according to Theorem 4.6, p_ξ can be uniquely extended to a sequentially continuous A-homomorphism $\overline{p_\xi}$ over $\mathcal{M}(\mathbf{A})$, see Fig. 1. Since $[0,1]^{\Xi}$ is the categorical power of [0,1], there exists a unique sequentially continuous A-homomorphism h_{Ξ} of $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ into $[0,1]^{\Xi}$ such that (for each $\xi \in \Xi$) the diagram in Fig. 2 commutes. Now, it suffices to prove

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "h"] & \mathcal{M}(\mathbf{B}) \arrow[r, "e"] & {[0,1]^{\Xi}} \arrow[r, "pr_{\xi}"] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, "p_{\xi}=pr_{\xi}\circ e\circ h"] \arrow[d, "id"'] & \# & {[0,1]} \\
\mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[urr, dashed, "\exists!\ \overline{p_{\xi}}"'] & & \forall \xi \in \Xi
\end{tikzcd}$$

FIGURE 1

that for each $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ we have $h_{\Xi}(u) \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$. This yields the desired unique extension $h_m : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$, see Fig. 3.

Let $A \in \mathbf{A}$. From Fig. 1 it follows that for all $\xi \in \Xi$ we have $\overline{p_{\xi}}(\chi_A) = pr_{\xi}\big(h(\chi_A)\big) = pr_{\xi}\big(h_{\Xi}(\chi_A)\big)$ and hence $h(\chi_A) = h_{\Xi}(\chi_A)$. Thus $h_m(\chi_A) = h(\chi_A)$ and h_m is a sequentially continuous A-homomorphism of $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ into $[0,1]^{\Xi}$ such that $h_m(\chi_A) \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$. Let $u = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i} \in s(\mathbf{A})$, where all c_i are rational numbers in [0,1]. Then $h_m(u) = \sum_{i=1}^{n} c_i h(\chi_{A_i}) \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$ and hence $h_m(u) \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$ for all $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$. Finally, it follows from Lemma 4.3 that h_m is uniquely determined. $\square$

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]^{\Xi}} \arrow[rr, "pr_{\xi}"] & \# & {[0,1]} \\
\mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[u, dashed, "\exists!\ h_{\Xi}"'] \arrow[urr, "\overline{p_{\xi}}"'] & & \forall \xi \in \Xi
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "id"'] & \mathcal{M}(\mathbf{B}) \arrow[r, "e"] & {[0,1]^{\Xi}} \\
\# & \mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[u, dashed, "?\ h_m"] \arrow[ur, "h_{\Xi}"'] & \#
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "id"'] & \mathcal{M}(\mathbf{B}) \\
\mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[ur, dashed, "\exists! h_m"'] \arrow[r, phantom, "\#"] & h_m(.) = h_{\Xi}(.)
\end{tikzcd}$$

FIGURE 3.

Corollary 4.9. *Let* $\mathbf{A}$ *and* $\mathbf{B}$ *be fields of subsets of* Ω *and* Ξ, *respectively. Let* h *be a sequentially continuous* A*-homomorphism of* $\mathbf{A}$ *into* $\mathbf{B}$. *Then there exists a unique sequentially continuous* A*-homomorphism* h_m *of* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *into* $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ *such that* $h(A) = h_m(A)$ *for all* $A \in \mathbf{A}$.

Theorem 4.10. $\mathbb{FELIA}$ *is an epireflective subcategory of the category* $\mathbb{ELIA}$, *where* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *is the epireflection of* $\mathbf{A}$.

Proof. Let $\mathbf{O}$ be an object of $\mathbb{ELIA}$, let $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ be an object of $\mathbb{FELIA}$, and let $h\colon \mathbf{O} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$ be a morphism. Then $\mathbf{O}$ is either of the form $\mathbf{A}$ or $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ for some σ-field of sets $\mathbf{A}$. Since (cf. (iii) in Lemma 4.3) the embedding of $\mathbf{O}$ into $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ is an epimorphism, we have to prove that h can be uniquely extended over $\mathcal{M}(\mathbf{A})$. In the first case the assertion follows by Theorem 4.8 and in the second case the assertion is trivial. ☐

Conclusion.

- *Observables are morphisms in* $\mathbb{ELIA}$. *To each classical observable* $h\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *there corresponds a unique observable* $h_m\colon \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$ *which extends h.*
- *Probability measures and probability integrals are exactly observables into* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$.
- $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *is the epireflection of* $\mathbf{A}$ *and* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *carries the initial* A*-poset structure with respect to probability integrals.*
- *Probability integrals are exactly additive linearizations.*

REFERENCES

[1] ADÁMEK, J.: Theory of Mathematical Structures, Reidel, Dordrecht, 1983.

[2] BARNETT, J. H.: *Origins of Boolean algebra in the logic of classes: George Boole, John Venn, and C. S. Pierce, Convergence*; Mathematical Association of America, `www.maa.org/publications/periodicals/convergence`.

[3] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi, Opus Posthumum. Accedit Tractatus de Seriebus Infinitis, et Epistola Gallicé Scripta de Ludo Pilae Reticularis.* Basileae: Impensis Thurnisiorum, Fratrum, 1713.

[4] BUGAJSKI, S.: *Statistical maps I. Basic properties*, Math. Slovaca **51** (2001), 321–342.

[5] ______ *Statistical maps II. Operational random variables*, Math. Slovaca **51** (2001), 343–361.

[6] BUTNARIU, D.—KLEMENT, E. P.: *Triangular Norm-Based Measures and Games with Fuzzy Coalitions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[7] CHOVANEC, F.—KÔPKA, F.: *D-posets*, in: *Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures: Quantum Structures* (K. Engesser et al., eds.), Elsevier, Amsterdam, 2007, pp. 367–428.

[8] CHOVANEC, F.—FRIČ, R.: *States as morphisms*, Internat. J. Theoret. Phys. **49** (2010), 3050–3060.

[9] DVUREČENSKIJ, A.—PULMANNOVÁ, S.: *New Trends in Quantum Structures*. Kluwer Academic Publ. and Ister Science, Dordrecht and Bratislava, 2000.

[10] FOULIS, D. J.: *Algebraic measure theory*, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena **48**, (2000), 435–461.

[11] FRIČ, R.: *Łukasiewicz tribes are absolutely sequentially closed bold algebras*, Czechoslovak Math. J. **52** (2002), 861–874.

[12] ______ *Remarks on statistical maps and fuzzy (operational) random variables*, Tatra Mt. Math. Publ. **30** (2005), 21–34.

[13] ______ *Statistical maps: a categorical approach*, Math. Slovaca **57** (2007), 41–57.

[14] ______ *Extension of domains of states*, Soft Comput. **13** (2009), 63–70.

[15] ______ *On D-posets of fuzzy sets*, Math. Slovaca **64** (2014), 545–554.

[16] FRIČ, R.—PAPČO, M.: *On probability domains*, Internat. J. Theoret. Phys. **49** (2010), 3092–3100.

[17] ______ *A categorical approach to probability*, Studia Logica **94** (2010), 215–230.

[18] ______ *Fuzzification of crisp domains*, Kybernetika **46** (2010), 1009–1024.

[19] ______ *On probability domains II.* Internat. J. Theoret. Phys. **50** (2011), 3778–3786.

[20] ______ *On probability domains III.* Internat. J. Theoret. Phys. **54** (2015), 4237–4246.

[21] ______ *On probability domains IV*, Internat. J. Theoret. Phys. (to appear).

[22] ______ *Upgrading probability via fractions of events*, Commun. Math. **24** (2016), 29–41.

[23] ______ *Probability: from classical to fuzzy*, Fuzzy Sets Syst. **326** (2017), 106–114.

[24] GUDDER, S.: *Fuzzy probability theory*, Demonstratio Math. **31** (1998), 235–254.

[25] KOLMOGOROV, A. N.: *Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer-Verlag, Berlin, 1933.

[26] KÔPKA, F.—CHOVANEC, F.: *D-posets*, Math. Slovaca **44** (1994), 21–34.

[27] MESIAR, R.: *Fuzzy sets and probability theory*, Tatra Mt. Math. Publ. **1** (1992), 105–123.

[28] MUNDICI, D.: *A geometric approach to MV-algebras*, in: *On Logical, Algebraic and Probabilistic Aspects of Fuzzy Set Theory*, Dedicated to E. P. Klement (R. Mesiar et al., eds.), Springer, Berlin, 2016, pp. 57–70.

[29] NAVARA, M.: *Probability theory of fuzzy events*, in: 4th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology and 11 Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (E. Montseny and P. Sobrevilla, eds.), Barcelona, Spain, 2005, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain, 2005, pp. 325–329.

[30] PAPČO, M.: *On measurable spaces and measurable maps*, Tatra Mt. Math. Publ. **28** (2004), 125–140.

[31] ______ *On fuzzy random variables: examples and generalizations*, Tatra Mt. Math. Publ. **30** (2005), 175–185.

[32] ______ *On effect algebras*, Soft Comput. **12** (2008), 373–379.

[33] ______ *Fuzzification of probabilistic objects*, in: 8th Conf. of the European Society for Fuzzy Logic and Technology—EUSFLAT '13 (G. Pasi et al., eds.), Milano, Italy, 2013, Atlantis Press, Amsterdam, 2013, pp. 67–71.

[34] RIEČAN, B.—MUNDICI, D.: *Probability on MV-algebras*, in: *Handbook of Measure Theory, Vol. II* (E. Pap, ed.), North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 869–910.

[35] RIEČAN, B.—NEUBRUNN, T.: *Integral, Measure, and Ordering*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.

[36] SKŘIVÁNEK, V.—FRIČ, R.: *Generalized random events*, Internat. J. Theoret. Phys. **54** (2015), 4386–4396.

[37] ZADEH, L. A.: *Probability measures of fuzzy events*, J. Math. Anal. Appl. **23** (1968), 421–27.

Received October 20, 2017

Mathematical Institute
Slovak Academy of Sciences
Grešákova 6
SK–040-01 Košice
SLOVAKIA
E-mail: babicova@saske.sk

sciendo

TATRA MOUNTAINS
Mathematical Publications
DOI: 10.2478/tmmp-2019-0016
Tatra Mt. Math. Publl. **74** (2019), 17–34

REAL FUNCTIONS IN STOCHASTIC DEPENDENCE

Dušana Babicová — Roman Frič

Mathematical Institute, Slovak Academy of Sciences, Košice, SLOVAKIA

ABSTRACT. In a fuzzified probability theory, random events are modeled by measurable functions into [0,1] and probability measures are replaced with probability integrals. The transition from Boolean two-valued logic to Łukasiewicz multivalued logic results in an upgraded probability theory in which we define and study asymmetrical stochastic dependence/independence and conditional probability based on stochastic channels and joint experiments so that the classical constructions follow as particular cases. Elementary categorical methods enable us to put the two theories into a perspective.

Introduction

We deal with the transition from a classical probability space $(\Omega, \mathbf{A}, p)$, where Ω is the set of outcomes of a random experiment, $\mathbf{A}$ is a σ-algebra of subsets of Ω modeling Boolean random events, and p is a probability measure on $\mathbf{A}$ [27], [32], to $\big(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$, or $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$, where $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ is the set of all measurable functions on Ω into [0,1], equipped with the multivalued Łukasiewicz logic and modeling fuzzy random events (such objects are called full Łukasiewicz tribes), $\int(.)\mathrm{d}p$ is the probability integral on $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ modeling the probability of fuzzy random events, and $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ is the set of all probability measures on $\mathbf{A}$. It is an upgrade which enables to model some new phenomena [4], [5], [14], [16], [17], [18], [19], [21], [23], [24], [33], [34], [35], [36], [41], [44].

2010 Mathematics Subject Classification: 26E50,28A35, 60A86, 60A05.

Keywords: measurable function, stochastic dependence, fuzzy random event, observable, probability measure, probability integral, state map, statistical map, joint experiment, asymmetrical independence.

The authors acknowledge the support by the grant of the Slovak Research and Development Agency under contract [APVV-16-0073] and by the grant of the Slovak Scientific Grant Agency under contract [VEGA project 2/0031/15]. The first author is a PhD student of Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics.

The present paper is devoted to stochastic dependence/independence in the realm of fuzzy random events, based on stochastic channels and joint experiments. In Section 1 we present some commutative diagrams describing the classical case, and Section 2 is devoted to their generalizations. While the classical stochastic independence is symmetrical, in Section 3 we define and study asymmetrical stochastic independence and the symmetrical stochastic independence can be seen as the conjunction of the asymmetrical ones. In the last section, we construct conditional probability in terms of a joint experiment and discuss how the construction is related to generalized probability on quantum structures with product [10], [31].

1. Classical case

Let $(\Omega, \mathbf{A})$ and $(\Xi, \mathbf{B})$ be measurable spaces and let $f\colon \Omega \longrightarrow \Xi$ be a measurable map. In what follows, we identify each set and its indicator function. The preimage map $f^{\leftarrow}$, $f^{\leftarrow}(B) = \big\{\omega \in \Omega;\ f(\omega) \in B\big\}$, $B \in \mathbf{B}$, is a sequentially continuous (with respect to the pointwise sequential convergence of indicator functions) Boolean homomorphism of $\mathbf{B}$ into $\mathbf{A}$. Further, $f^{\leftarrow}$ defines a map $T_{f^{\leftarrow}}$ on the set $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ of all probability measures on $\mathbf{A}$ into the set $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ of all probability measures on $\mathbf{B}$ (called a statistical map, a distribution map, a push-forward): $T_{f^{\leftarrow}}(p)$ is the composition $p \circ f^{\leftarrow}$, $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$.

Let $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ be a probability space. Recall that two systems of measurable sets $\mathbf{B}, \mathbf{C} \subseteq \mathbf{A}$ are said to be stochastically independent if $p(B \cap C) = p(B).p(C)$ whenever $B \in \mathbf{B}$ and $C \in \mathbf{C}$. Observe that in the classical probability theory the notion of stochastic independence is symmetrical.

Probability spaces $(\Omega, \mathbf{A}, p)$, $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, describe random experiments having the same fixed component $(\Omega, \mathbf{A})$, and $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ represents the "choice" of suitable probability measure, representing "the law of randomness", one of all possible probability measures related to the experiment in question. Let $(\Xi, \mathbf{B})$ be another measurable space and let $f\colon \Omega \longrightarrow \Xi$ be a measurable map. Then, a choice of $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ determines the choice $p \circ f^{\leftarrow} \in \mathcal{P}(\mathbf{B})$. We say that $f^{\leftarrow}$ pushes forward p to $p \circ f^{\leftarrow}$ or that $f^{\leftarrow}$ "conveys the stochastic information p on $\mathbf{A}$ to $p \circ f^{\leftarrow}$ on $\mathbf{B}$". We shall study stochastic independence/dependence in terms of how diagrams of measurable maps influence choices of probability measures on the corresponding σ-fields of random events. Generalizations will be studied in the next sections and the results support the upgrading of classical probability theory.

Let $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B})$ be the usual product of $(\Omega, \mathbf{A})$ and $(\Xi, \mathbf{B})$, let $pr_1 \colon \Omega \times \Xi \longrightarrow \Omega$, $pr_2 \colon \Omega \times \Xi \longrightarrow \Xi$ be the usual projections ($pr_1(\omega, \xi) = \omega$, $pr_2(\omega, \xi) = \xi$, $\omega \in \Omega$, $\xi \in \Xi$), let $pr_1^{\leftarrow} \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ and $pr_2^{\leftarrow} \colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ be the corresponding measurable preimage maps.

Let $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$. Then, $pr_1^{\leftarrow}(A) = A \times \Xi$ and $pr_2^{\leftarrow}(B) = \Omega \times B$. For $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, the compositions $r \circ pr_1^{\leftarrow}$ and $r \circ pr_2^{\leftarrow}$ define lateral maps $L_1 : \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ and $L_2 \colon \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$, respectively. On the one hand, each "product" experiment $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$ defines two "lateral" experiments $\big(\Omega, \mathbf{A}, L_1(r)\big)$ and $\big(\Xi, \mathbf{B}, L_2(r)\big)$, see Figure 1. On the other hand, Figure 1 leads to the notion of a joint experiment.

$$\begin{tikzcd}
& & {[0,1]} & & \\
\mathbf{A} \arrow[urr, "L_1(r)"] \arrow[rr, "pr_1^{\leftarrow}"] \arrow[ur, phantom, "\#"] & & \mathbf{A} \times \mathbf{B} \arrow[u, "r"'] & & \mathbf{B} \arrow[ull, "L_2(r)"'] \arrow[ll, "pr_2^{\leftarrow}"'] \arrow[ul, phantom, "\#"]
\end{tikzcd}$$

Figure 1.

Definition 1.1. Let $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ and $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ be classical random experiments. Let $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ and let $L_1(r) = p$, $L_2(r) = q$. Then, $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$ is said to be a **classical joint experiment**.

Let $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ and $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ be random experiments. Denote $\mathcal{J}(p, q)$ the corresponding set of all joint experiments $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$. Let $p \times q$ be the product measure ($(p \times q)(A \times B) = p(A).q(B)$, $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$). Since $L_1(p \times q) = p$ and $L_2(p \times q) = q$, the set $\mathcal{J}(p, q)$ is not empty. Observe that (in a nontrivial case) equations $L_1(r) = p$ and $L_2(r) = q$ do not determine r uniquely.

Further, let $(\Lambda, \mathbf{C})$ be a measurable space and let $f \colon \Lambda \longrightarrow \Omega$, $g \colon \Lambda \longrightarrow \Xi$ be measurable maps. Then, there is a unique measurable map $h \colon \Lambda \longrightarrow \Omega \times \Xi$ such that $pr_1 \circ h = f$ and $pr_2 \circ h = g$, namely $h(\lambda) = \big(f(\lambda), g(\lambda)\big)$, $\lambda \in \Lambda$. Indeed, $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B})$ is the categorical product of measurable spaces $(\Omega, \mathbf{A})$ and $(\Xi, \mathbf{B})$. (Recall, see, e.g., [1] that an object $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, along with projections $pr_i : \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \longrightarrow \mathcal{O}_i$, $i = 1, 2$, is the product of objects $\mathcal{O}_1$ and $\mathcal{O}_2$ whenever for each object $\mathcal{O}$ and each pair of morphisms $f_i \colon \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_i$, $i = 1, 2$, there exists a unique morphism $f \colon \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ such that $f_i = pr_i \circ f$, $i = 1, 2$; all objects and morphisms belong to a given category.) Denote $h = f \otimes g$. Consequently, a choice $s \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$ uniquely determines the choices $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, $q \in \mathcal{P}(\mathbf{B})$, $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, such that $p = s \circ f^{\leftarrow}$, $q = s \circ g^{\leftarrow}$, $r = s \circ (f \otimes g)^{\leftarrow}$ (see Figure 2).

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "pr_1^{\leftarrow}"] \arrow[dr, "f^{\leftarrow}"'] & \mathbf{A}\times\mathbf{B} \arrow[d, "(f\otimes g)^{\leftarrow}"] \arrow[d, phantom, shift right=6, "\#"'] \arrow[d, phantom, shift left=6, "\#"] & \mathbf{B} \arrow[l, "pr_2^{\leftarrow}"'] \arrow[dl, "g^{\leftarrow}"] \\
 & \mathbf{C} \arrow[d, "s"] & \\
 & {[0,1]} &
\end{tikzcd}$$

Figure 2.

The proof of the following lemma is straightforward and is omitted.

Lemma 1.2. *Let* $(\Omega, \mathbf{A}, p)$, $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ *and* $(\Lambda, \mathbf{C}, s)$ *be classical random experiments. Let* $f\colon \Lambda \longrightarrow \Omega$, $g\colon \Lambda \longrightarrow \Xi$ *be measurable maps such that*

$$s \circ f^{\leftarrow} = p \quad \textit{and} \quad s \circ g^{\leftarrow} = q.$$

Let $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$ *be a joint experiment of* $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ *and* $(\Xi, \mathbf{B}, q)$. *Then, the following are equivalent*

(i) $f^{\leftarrow}(\mathbf{A}) = \{f^{\leftarrow}(A); A \in \mathbf{A}\}$ *and* $g^{\leftarrow}(\mathbf{B}) = \{g^{\leftarrow}(B); B \in \mathbf{B}\}$ *are stochastically independent in* $(\Lambda, \mathbf{C}, s)$;

(ii) $pr_1^{\leftarrow}(\mathbf{A}) = \{A \times \Xi; A \in \mathbf{A}\}$ *and* $pr_2^{\leftarrow}(\mathbf{B}) = \{\Omega \times B; B \in \mathbf{B}\}$ *are stochastically independent in* $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, p \times q)$;

(iii) $r = p \times q$.

Definition 1.3. Let $(\Omega\times\Xi, \mathbf{A}\times\mathbf{B}, r)$ be a classical joint experiment of $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ and $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ and let $r = p \times q$. Then, $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ and $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ are said to be **stochastically independent in** $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$.

Remark 1.4. Since the probability $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ in the joint experiment of $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ and $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ is not uniquely determined, probability spaces do not admit categorical products. Lemma 1.2 implies that $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, p \times q)$, along with the projections pr_i, $i = 1, 2$, can be viewed as the "independent categorical product". Indeed, if $(\Lambda, \mathbf{C}, s)$ is a probability space, $f\colon \Lambda \longrightarrow \Omega$ and $g\colon \Lambda \longrightarrow \Xi$ are measurable and measure preserving maps such that $f^{\leftarrow}(\mathbf{A})$ and $g^{\leftarrow}(\mathbf{B})$ are stochastically independent in $(\Lambda, \mathbf{C}, s)$, then there exists a unique measurable and measure preserving map $h\colon \Lambda \longrightarrow \Omega \times \Xi$ such that $pr_1 \circ h = f$, $pr_2 \circ h = g$, and hence $s \circ h^{\leftarrow} = p \times q$. For a categorical approach to generalized stochastic independence, the reader is referred to [13].

As we shall see, the transition from Boolean logic to multivalued Łukasiewicz logic enables us (modifying the diagram in Figure 2) to define asymmetrical independence for fuzzified random experiments so that the symmetrical (mutual) independence becomes the conjunction of two asymmetrical ones.

2. Fuzzified case

In this section, we recall basic notions of the upgraded probability theory and develop a fuzzification of the joint experiment leading to asymmetrical independence.

In the categorical approach to probability theory [17], we start with a suitable category in which basic notions of probability theory can be viewed as objects and morphisms. Traditionally, the category $\mathbb{D}$ of D-posets and sequentially continuous D-homomorphisms (or the isomorphic category of effect algebras) serves the purpose. As pointed out in [42], [2], the isomorphic category $\mathbb{A}$ of A-posets has the advantage over $\mathbb{D}$ in the sense that A-posets capture the logic of operations on random events and follow the original ideas of G. Boole [3].

In order to model events in quantum probability, *D-posets* have been introduced in [29]. They generalize Boolean algebras, MV-algebras and other probability domains, and provide a category in which observables and states become morphisms [6]. Recall that a D-poset is a partially ordered set X with the greatest element 1_X, the least element 0_X, and a partial binary operation called *difference*, such that $a \ominus b$ is defined if and only if $b \leq a$, and two natural axioms are assumed. A *D-homomorphism* is a map preserving the D-poset structure (partial order, constants, difference). Recall that each D-poset can be reorganized into an effect algebra [12] and the two structures are equivalent (cf. [9], [37]).

Recall that an A-poset is a system $(S, \leq, 0, 1, \oplus)$ consisting of a partially ordered set S with top element 1 and bottom element 0 and a partial binary operation $\oplus$ such that:

(A$_1$) If $a \oplus b$ is defined, then $b \oplus a$ is defined and $a \oplus b = b \oplus a$.

(A$_2$) If $(a \oplus b) \oplus c$ is defined, then $a \oplus (b \oplus c)$ is defined and $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.

(A$_3$) For each $a \in S$ there exists a unique $a^c \in S$ such that $a \oplus a^c = 1$.

(A$_4$) If $a \oplus b$ is defined, $a_1 \leq a$ and $b_1 \leq b$, then $a_1 \oplus b_1$ is defined and $a_1 \oplus b_1 \leq a \oplus b$.

If no confusion can arise, then an A-poset $(S, \leq, 0, 1, \oplus)$ will be condensed to S. To avoid unnecessary formalism, if S_1 and S_2 are A-posets, then the order, constants, and the addition in S_1 and S_2 will be denoted by the same symbols "$\leq, 0, 1, \oplus$". Let S_1 and S_2 be A-posets and let h be a map on S_1 into S_2 preserving the order, constants, and addition. Then, h is said to be an A-homomorphism.

Remark 2.1. Simple calculations show that $a \oplus 0 = a$ and (A_4) is equivalent to "$a \oplus b$ is defined if and only if $a \leq b^c$". Further (cf. [42]), the following holds

$(\mathrm{A}_3{}^*)$ For each $b \in S$ and each $a \in S$, $a \leq b$, there exists a unique $a_b \in S$ such that $a \oplus a_b = b$.

The element $a_b \in S$ in $(\mathrm{A}_3{}^*)$ is called the relative complement of a in b. Clearly, if $b = 1$, then $a_b = a^c$. Condition $(\mathrm{A}_3{}^*)$ amounts to (the unique) "solvability" of the equation $a \oplus x = b$, $a \leq b$.

A-posets and D-posets are isomorphic structures. Indeed, let S be a poset, with the smallest element 0 and the largest element 1, then partial operations "addition" and "difference" are dual via "$a \oplus x = b$ if and only if $b \ominus x = a$", where x is the relative complement of a in b. Moreover, a map is an A-homomorphism if and only if it is a D-homomorphism. Consequently, $\mathbb{D}$ and $\mathbb{A}$ are isomorphic categories and, moreover, isomorphic are the corresponding subcategories of $\mathbb{D}$ and $\mathbb{A}$. This makes possible to use deep results on Łukasiewicz tribes, observables, state maps, and statistical maps formulated in terms of D-posets (e.g., in [11], [15], [22], [23]) as the corresponding results in terms of A-posets.

In the upgraded probability theory, the notion of random experiment is modified as follows. Classical random events $\mathbf{A}$ are extended to $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ (each $A \in \mathbf{A}$ is considered as the indicator function $\chi_A \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ $(\chi_A(\omega) = 1)$ whenever $\omega \in A$ and $\chi_A(\omega) = 0$ otherwise), the set Ω of outcomes of a classical random experiment is extended to $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ (each $\omega \in \Omega$ is considered as the corresponding Dirac measure $\delta_\omega \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$), each probability measure $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ is extended to the corresponding probability integral $\overline{p} = \int(.)\mathrm{d}p$ on $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ ($\overline{p}$ reduced to $\mathbf{A}$ can be considered as p). Here, $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A})\big)$ represents the "hardware" and $\int(.)\mathrm{d}p$ represents the "stochastics" of experiment.

Definition 2.2. Let $(\Omega, \mathbf{A})$ be a measurable space. Then, $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A})\big)$ is said to be an **event space** and $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ is said to be an **experiment**.

Let $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ and $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$ be two experiments. Then, instead of a measurable map $f\colon \Omega \longrightarrow \Xi$ and its preimage map $f^{\leftarrow}\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$, we start with a sequentially continuous A-homomorphism $g\colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ (g is an A-homomorphism which preserves sequential limits with respect to pointwise convergence), called **observable**, and f is replaced with a map $T_g\colon \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$, called **statistical map**. Recall [4], [14], [17], [22], [24], [37], [38] that a big difference is that an observable $g\colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ can map a crisp event $B \equiv \chi_B \in \mathbf{B}$ to a genuine fuzzy random event $g(\chi_B) \in \mathcal{M}(\mathbf{A}) \setminus \mathbf{A}$ and, dually, T_g can map a Dirac probability measure $\delta_\omega, \omega \in \Omega$, to genuine probability measure $q = T_g(\delta_\omega), 0 < q(B) < 1$ for some $B \in \mathbf{B}$. Note that the closed unit interval [0,1] will be considered as $\mathcal{M}(\mathbf{T})$, where $\mathbf{T}$ is is the trivial σ-algebra $(\Omega = \{\omega\}, \mathbf{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, we identify $a \in [0,1]$ and $a(\omega) \in \mathcal{M}(\mathbf{T})$), and probability integrals on $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ are observables into $\mathcal{M}(\mathbf{T})$. In the sequel, we shall utilize the following fact. Let $g\colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ be an observable. For each probability integral $\overline{p} = \int(.)\mathrm{d}p$ on $\mathcal{M}(\mathbf{A})$, the composition $\overline{p} \circ g$ of two observables is an observable, and hence a probability integral $\overline{q} = \int(.)\mathrm{d}q$ on $\mathcal{M}(\mathbf{B})$. This yields the statistical map $T_g\colon \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ sending p to $q = T_g(p)$. For $u \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$ we have $\int u\mathrm{d}\big(T_g(p)\big) = \int g(u)\mathrm{d}p$ and, for $p = \delta_\omega$, $\omega \in \Omega$, we get $\big(g(u)\big)(\omega) = \int g(u)\mathrm{d}(\delta_\omega) = \int u\mathrm{d}\big(T_g(\delta_\omega)\big)$.

Event spaces generalize measurable spaces and statistical maps generalize measurable maps.

To develop the notion of asymmetrical stochastic independence, we shall define a joint experiment.

Definition 2.3. Let $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ and $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$ be two experiments. Then, $(\mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$, where $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ and $L_1(r) = p$, $L_2(r) = q$, is said to be a **joint experiment**.

Note that the lateral (marginal) maps $L_1\colon \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ and $L_2\colon \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ generalize the classical projections (of outcomes) $pr_1\colon \Omega \times \Xi \longrightarrow \Omega$ and $pr_2\colon \Omega \times \Xi \longrightarrow \Xi$. The dual maps are defined in a canonical way. For $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$, define $\overline{u} \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ as follows: for $\omega \in \Omega$, $\xi \in \Xi$, put $\overline{u}(\omega, \xi) = u(\omega)$ and denote $e_1\colon \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ the resulting canonical embedding sending u to $\overline{u}$; $e_2\colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ is defined analogously $\big(\overline{v}(\omega, \xi) = v(\xi)\big)$. Clearly, $L_1 = T_{e_1}$ and $L_2 = T_{e_2}$ ($\int u\mathrm{d}p = \int \overline{u}\mathrm{d}r, u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ and $\int v\mathrm{d}q = \int \overline{v}\mathrm{d}r, v \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$).

A "stochastic channel" is a channel through which a "stochastic information" flows from one event space into another event space. In the classical case, pairs $(f, f^{\rightarrow})$ serve the purpose and, in the upgraded case, the dual maps (cf. [23]) an observable $g\colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ and corresponding statistical map $T_g\colon \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ play the key role.

Definition 2.4. Let $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A})\big)$ and $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{B})\big)$ be event spaces, let $g\colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ be an observable and let $T_g\colon \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ be corresponding statistical map. Then, (g, T_g) is said to be a **stochastic channel**.

Central to our investigations is the following

Question. How an observable $g\colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ or, more precisely, the corresponding stochastic channel (g, T_g), influences the joint experiment $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r\big)$?

Let $(\Omega, \mathbf{A}), (\Xi, \mathbf{B}), (\Lambda, \mathbf{C})$ be measurable spaces, let $f\colon \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ and $g\colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ be observables, let $T_f\colon \mathcal{P}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ and $T_g\colon \mathcal{P}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ be the corresponding statistical maps. For $\lambda \in \Lambda$, let δ_λ be the Dirac probability point-measure ($\delta_\lambda(C) = 1$ for $\lambda \in C \in \mathbf{C}$ and $\delta_\lambda(C) = 0$ otherwise) and let $T_f(\delta_\lambda) \times T_g(\delta_\lambda)$ be the corresponding product probability measure on $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. For $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, put

$$\big(h(u)\big)(\lambda) = \int u \mathrm{d}\big(T_f(\delta_\lambda) \times T_g(\delta_\lambda)\big), \qquad \lambda \in \Lambda, \tag{$\otimes$}$$

and denote h the resulting map of $\mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ into $[0,1]^\Lambda$.

Proposition 2.5.

- (i) *h is an observable of $\mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ into $\mathcal{M}(\mathbf{C})$.*
- (ii) *Let $e_1 \colon \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ and $e_2 \colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ be the canonical embeddings. Then, $h \circ e_1 = f$ and $h \circ e_2 = g$.*

Proof. (i) It follows directly from ($\otimes$) that h is sequentially continuous, preserves order, constants, and the partial operation $\oplus$ of addition (i.e., $h(v+u) = h(v) + h(u)$ whenever $u, v \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, $u \leq (1-v)$). Let $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$. It remains to prove that $h(u) \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$. The assertion follows from Fubini theorem. Indeed,

$$\big(h(u)\big)(\lambda) = \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Xi u(\omega,\xi) \mathrm{d}\big(T_g(\delta_\lambda)\big) \right) \mathrm{d}\big(T_f(\delta_\lambda)\big),$$

where $\int_\Xi u(\omega,\xi)\mathrm{d}\big(T_g(\delta_\lambda)\big)$ is an $\mathbf{A}$-measurable function $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$. Then,

$$\int\limits_\Omega v \mathrm{d}\big(T_f(\delta_\lambda)\big) = \int\limits_\Lambda f(v) \mathrm{d}(\delta_\lambda) = \big(f(v)\big)(\lambda),$$

and hence, $h(u) = f(v) \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$. This proves (i).

(ii) Let $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$. By ($\otimes$) and from Fubini theorem,

$$\begin{aligned} \Big(h\big(e_1(u)\big)\Big)(\lambda) &= \int e_1(u) \mathrm{d}\big(T_f(\delta_\lambda) \times T_g(\delta_\lambda)\big) \\ &= \int\limits_\Omega \left(\int_\Xi u(\omega,\xi) \mathrm{d}\big(T_g(\delta_\lambda)\big) \right) \mathrm{d}\big(T_f(\delta_\lambda)\big), \qquad \lambda \in \Lambda. \end{aligned}$$

Since for $\omega \in \Omega$ and $\xi \in \Xi$, we have $\big(e_1(u)\big)(\omega,\xi) = u(\omega).1_\Xi(\xi)$, where $1_\Xi(\xi) = 1$ for all $\xi \in \Xi$, the last integral reduces to

$$\int f(u) \mathrm{d}(\delta_\lambda) = \big(f(u)\big)(\lambda).$$

Thus, $h \circ e_1 = f$. The proof of $h \circ e_2 = g$ is analogous. ☐

Corollary 2.6. *The diagram in Figure 3 commutes.*

Definition 2.7. Let $f \colon \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ and $g \colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ be observables. Then, the observable $h \colon \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ defined by ($\otimes$) is said to be the **product of observables** f and g; it will be denoted by $f \otimes g$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[rr, "e_1"] \arrow[ddrr, "f"'] & & \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \arrow[dd, "h"] & & \mathcal{M}(\mathbf{B}) \arrow[ll, "e_2"'] \arrow[ddll, "g"] \\
& \# & & \# & \\
& & \mathcal{M}(\mathbf{C}) & &
\end{tikzcd}$$

Figure 3.

Proposition 2.8. *Let $f\otimes g\colon \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\longrightarrow\mathcal{M}(\mathbf{C})$ be the product observable and let $T_{f\otimes g}\colon \mathcal{P}(\mathbf{C})\longrightarrow\mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ be the corresponding statistical map.*

(i) *For each $\lambda\in\Lambda$, we have $T_{f\otimes g}(\delta_\lambda)=T_f(\delta_\lambda)\times T_g(\delta_\lambda)$.*

(ii) *Let $\Xi=\Omega$, $\mathbf{C}=\mathbf{A}$, and let f be the identity observable $id\colon\mathcal{M}(\mathbf{A})\longrightarrow\mathcal{M}(\mathbf{A})$. Then, for each $\omega\in\Omega$, we have $T_{id\otimes g}(\delta_\omega)=\delta_\omega\times T_g(\delta_\omega)$.*

Proof. (i). We have to show that for each $A\times B$, $A\in\mathbf{A}$, $B\in\mathbf{B}$ we have $\big(T_{f\otimes g}(\delta_\lambda)\big)(A\times B)=\big(T_f(\delta_\lambda)\times T_g(\delta_\lambda)\big)(A\times B)=\big(T_f(\delta_\lambda)\big)(A).\big(T_g(\delta_\lambda)\big)(B)$. From $T_{f\otimes g}(\delta_\lambda)\in\mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, we get

$$\begin{aligned}\big(T_{f\otimes g}(\delta_\lambda)\big)(A\times B)&=\int\chi_A.\chi_B\mathrm{d}\big(T_{f\otimes g}(\delta_\lambda)\big)\\&=\int(f\otimes g)(\chi_A.\chi_B)\mathrm{d}(\delta_\lambda)=(f\otimes g)(\chi_A.\chi_B)(\lambda).\end{aligned}$$

From $((\otimes))$, it follows that

$$(f\otimes g)\times(\chi_A.\chi_B)(\lambda)=\int\chi_A.\chi_B\mathrm{d}\big(T_f(\delta_\lambda)\times T_g(\delta_\lambda)\big).$$

Using Fubini theorem, we get

$$(f\otimes g)\times(\chi_A.\chi_B)(\lambda)=\left(\int\chi_A\mathrm{d}\big(T_f(\delta_\lambda)\big)\right).$$

$$\left(\int\chi_B\mathrm{d}\big(T_g(\delta_\lambda)\big)\right)=\big(T_f(\delta_\lambda)\times T_g(\delta_\lambda)\big)(A\times B).$$

This completes the proof of (i).

(ii). Let $\omega\in\Omega$, $A\in\mathbf{A}$, $B\in\mathbf{B}$. Recall that $\big(T_{id\otimes g}(\delta_\omega)\big)(A\times B)=\int(id\otimes g)\times(\chi_A.\chi_B)\mathrm{d}\delta_\omega$ and, according to $(\otimes)$, we have

$$(id\otimes g)(\chi_A.\chi_B)(\omega)=\int\chi_A.\chi_B\mathrm{d}\big(\delta_\omega\times T_g(\delta_\omega)\big),\qquad\omega\in\Omega.$$

Consequently, $\big((id\otimes g)(\chi_A.\chi_B)\big)(\omega)=\delta_\omega(A).\big(T_g(\delta_\omega)\big)(B)$ and hence,

$$\big(T_{id\otimes g}(\delta_\omega)\big)(A\times B)=\delta_\omega(A).\big((T_g)(\delta_\omega)\big)(B).$$

This completes the proof of (ii). ☐

Remark 2.9. Observe that the notions of a statistical map and the product $T \otimes S$ of two statistical maps $T\colon \mathcal{P}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ and $S\colon \mathcal{P}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ can be defined directly via a Markov kernel (see, e.g., [4], [11], [24]). Since two statistical maps are equal whenever they coincide on Dirac probability measures and since $(T \otimes S)(\delta_\lambda) = T(\delta_\lambda) \times S(\delta_\lambda)$ for all $\lambda \in \Lambda$, where Λ is the underlying set of $\mathbf{C}$, it follows that in the preceding proposition we have $T_{f\otimes g} = T_f \otimes T_g$.

Proposition 2.10. *Let* $id\colon \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ *be the identity observable, let* $g\colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ *be an observable, let* $T_{id}\colon \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *and* $T_g\colon \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ *be the corresponding statistical maps. Then, there is a unique statistical map* $T\colon \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ *making the diagram in Figure 4 commutative* ($L_1 \circ T = T_{id}$, $L_2 \circ T = T_g$) *and* $T = T_{id\otimes g}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\mathbf{A}) & \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \arrow[l, "L_1"'] \arrow[r, "L_2"] & \mathcal{P}(\mathbf{B}) \\
& \mathcal{P}(\mathbf{A}) \arrow[ul, "T_{id}"] \arrow[u, dashed, "\exists!", "T"'] \arrow[u, phantom, "\#\qquad\qquad\#" near end] \arrow[ur, "T_g"'] &
\end{tikzcd}$$

Figure 4.

Proof. First, (ii) in the preceding proposition implies that for each $\delta_\omega \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, $\omega \in \Omega$, we have $T_{id\otimes g}(\delta_\omega) = \delta_\omega \times T_g(\delta_\omega)$. Hence, $(L_1 \circ T_{id\otimes g})(\delta_\omega) = T_{id}(\delta_\omega)$ and $(L_2 \circ T_{id\otimes g})(\delta_\omega) = T_g(\delta_\omega)$. Again, since two statistical maps are equal whenever they coincide on Dirac probability measures, the first assertion ($L_1 \circ T = T_{id}$, $L_2 \circ T = T_g$) follows.

Second, let $T\colon \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ be a statistical map such that $L_1 \circ T = T_{id}$, $L_2 \circ T = T_g$. We shall show that $T = T_{id\otimes g}$. Recall that $T = T_{id\otimes g}$ if and only if for all $\omega \in \Omega$ we have $T(\delta_\omega) = T_{id\otimes g}(\delta_\omega)$.

Contrariwise, suppose that $T \neq T_{id\otimes g}$. Then, there exists $\omega \in \Omega$ such that $T(\delta_\omega) \neq T_{id\otimes g}(\delta_\omega)$. Now, $L_1\big(T(\delta_\omega)\big) = \delta_\omega$ implies $\big(T(\delta_\omega)\big)\big((\Omega \setminus \{\omega\}) \times \Xi\big) = 0$ and $\big(T(\delta_\omega)\big)\big((\{\omega\}) \times \Xi\big) = 1$. Further, $L_2 \circ T = T_g$ implies that for each $B \in \mathbf{B}$ we have

$$\begin{aligned}
\big(T_g(\delta_\omega)\big)(B) &= \big(T(\delta_\omega)\big)(\Omega \times B) \\
&= \big(T(\delta_\omega)\big)(\{\omega\} \times B) \cup \big((\Omega \setminus \{\omega\}) \times B\big) = \big(T(\delta_\omega)\big)\big((\{\omega\} \times B)\big).
\end{aligned}$$

Consequently, for each $A \times B, A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}$ we have $\big(T(\delta_\omega)\big)(\Omega \times B) = \big(\delta_\omega(A)\big).\big(T_g(\delta_\omega)\big)(B)$ and hence, $T(\delta_\omega) = \delta_\omega \times T_g(\delta_\omega)$. Finally, it follows from (ii) in the preceding proposition that $\delta_\omega \times T_g(\delta_\omega) = T_{id\otimes g}(\delta_\omega)$, a contradiction. $\square$

Corollary 2.11.

(i) *There exists a unique observable* $h\colon \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ *making the diagram in Figure 5 commutative and* $h = id \otimes g$.

(ii) *For each* $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *there exists a unique* $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ *such that* $\overline{r} = \overline{p} \circ (id \otimes g)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[r, "e_1"] \arrow[dr, "id"'] \arrow[dr, phantom, "\#", bend left] & \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \arrow[d, dashed, "\exists!"', "id\otimes g"] & \mathcal{M}(\mathbf{B}) \arrow[l, "e_2"'] \arrow[dl, "g"] \arrow[dl, phantom, "\#", bend right] \\
& \mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[d, "\overline{p}"] & \\
& \mathcal{M}(\mathbf{T}) &
\end{tikzcd}$$

Figure 5.

Definition 2.12. Let $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ and $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$ be experiments, let $id\colon \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ be the identity observable, let $g\colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ be an observable, let $T_{id}\colon \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ and $T_g\colon \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ be the corresponding statistical maps. Let $T_g(p) = q$. Then, the diagram in Figure 4 is said to be the g-**joint** of $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ and $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$.

Now, we are in a position to give a general answer to our question. A more specific answer will be given in the next section.

Answer (general)**.** Let$\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r\big)$ be a joint experiment of $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ and $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$. Let $g\colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ be an observable and let (g, T_g) be the corresponding stochastic channel such that $T_g(p) = q$. Then, the choice of $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ is uniquely determined in the following sense (cf. Proposition 2.10): $T_{id\otimes g}$ is the unique statistical map T of $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ into $\mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ such that $L_1 \circ T = T_{id}$, $L_2 \circ T = T_g$, and $r = T_{id\otimes g}(p)$. In plain words, $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}(T_{id\otimes g}(p))\big)$ is the unique joint experiment "taking into account the stochastic channel (g, T_g) for which $T_g(p) = q$".

Remark 2.13. Note that if $L_2 \circ T = T_g$, $T\colon \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, then T_g is said to be factorized through $\mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ and, in a different context, products and factorizations of statistical maps were studied in [4], [5], [11], where $M_1^+(\Omega, \mathbf{A})$ denotes the set $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ of all probability measures on $\mathbf{A}$.

3. Asymmetrical stochastic independence

Let $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ and $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$ be random experiments, let $g\colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ be an observable, and let (g, T_g) be the corresponding stochastic channel such that $T_g(p) = q$. It is reasonable to say that $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ is g-**independent** of $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ whenever the conveyed stochastic information $\overline{q} = \int(.)\mathrm{d}q$ on the event space $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B})\big)$ "does not discriminate" the choice of stochastic information on $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A})\big)$. More precisely, whenever $\overline{s} \circ g = \overline{q}$ for all $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ or, equivalently, $T_g(s) = q$ for all $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Such stochastic channel can be characterized as **degenerated** (q-valued). The next proposition describes such channels.

For $u \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$ and $\omega \in \Omega$, put $\big(g(u)\big)(\omega) = \int u\mathrm{d}q$. This defines a mapping g of $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ into$[0,1]^{\Omega}$.

Proposition 3.1.

(i) *g is an observable into $\mathcal{M}(\mathbf{A})$.*

(ii) *$T_g(s) = q$ for all $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$.*

Proof.

(i) follows directly from the definition of g.

(ii) Let $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$. It follows from the definition of g that, for each $\chi_B \equiv \mathbf{B}$, $g(\chi_B)$ is a constant function and for all $\omega \in \Omega$ we have

$$\big(g(\chi_B)\big)(\omega) = \int \chi_B \mathrm{d}q = q(B).$$

Hence, $\big(T_g(s)\big)(B) = \int \chi_B \mathrm{d}\big(T_g(s)\big) = \int g(\chi_B)\mathrm{d}s = q(B)$ and $T_g(s) = q$. □

Definition 3.2. Let $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A})\big)$ and $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B})\big)$ be event spaces, let $g\colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ be an observable, and let T_g be the corresponding statistical map. Let $q \in \mathcal{P}(\mathbf{B})$. If $T_g(s) = q$ for all $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, then g and T_g are said to be **degenerated**.

Proposition 3.3. *Let $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ and $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$ be experiments. Let $id\colon \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ be the identity observable, let $g\colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ be a degenerated observable, let $id \otimes g\colon \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ be their product, let T_{id}, T_g, and $T_{id\otimes g}$ be the corresponding statistical maps. Assume that $T_g(p) = q \in \mathcal{P}(\mathbf{B})$. Then, for all $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ we have $T_{id\otimes g}(s) = s \times q$.*

Proof. Let $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$. Recall that $T_{id\otimes g}(s)(A \times B) = \int (id \otimes g) \times (\chi_A \cdot \chi_B)\mathrm{d}s$ and, according to $(\otimes)$, we have

$$(id \otimes g)(\chi_A \cdot \chi_B)(\omega) = \int \chi_A \cdot \chi_B \mathrm{d}\big(\delta_\omega \times T_g(\delta_\omega)\big), \quad \omega \in \Omega.$$

Consequently, $\big((id \otimes g)(\chi_A.\chi_B)\big)(\omega) = \delta_\omega(A).\big(T_g(\delta_\omega)\big)(B) = \delta_\omega(A).q(B)$ and hence $\big(T_{id\otimes g}(s)\big)(A \times B) = s(A).q(B)$. This completes the proof. $\square$

Definition 3.4. Let $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ and $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$ be experiments, let $g\colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ be an observable, and let $T_g\colon \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ be the corresponding statistical map such that $T_g(p) = q$. If T_g is degenerated, then $(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ is said to be **stochastically g-independent on $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$.**

Proposition 3.3 yields the following

Answer (specific)**.** Assume that $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ is stochastically g-independent on $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$, i.e., (g, T_g) is a degenerated stochastic channel, and $T_g(p) = q$. Then, for all $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ we have $T_{id\otimes g}(s) = s \times T_g(s) = s \times q$ and, in particular, $T_{id\otimes g}(p) = p \times q$.

Combining a g-joint and an f-joint (in f-joint we use the mirror image and the same symbol id denotes both identity observables) we get the diagram in Figure 6.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) & \\
\mathcal{P}(\mathbf{A}) \arrow[ur, "T_{id\otimes g}"] \arrow[rr, shift left, "T_g"] & & \mathcal{P}(\mathbf{B}) \arrow[ul, "T_{f\otimes id}"'] \arrow[ll, shift left, "T_f"]
\end{tikzcd}$$

Figure 6.

The properties of a g-joint and an f-joint can be summarized as follows.

Corollary 3.5. *For the diagram in Figure 6, the following are satisfied*

(i) $T_{id\otimes g}(p) = p \times q = T_{f\otimes id}(q)$.

(ii) *For all* $t \in \mathcal{P}(\mathbf{B})$ *we have* $(T_{id\otimes g} \circ T_f)(t) = T_{id\otimes g}(p) = p \times q$.

(iii) *For all* $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *we have* $(T_{f\otimes id} \circ T_g)(s)T_{f\otimes id}(q) = p \times q$.

Definition 3.6. Let $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ and $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$ be experiments. Let $g\colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ and $f\colon \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$ be observables, let the first experiment be stochastically g-independent on the second and, likewise, let the second experiment be stochastically f-independent on the first. Then, $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ and $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$ are said to be **stochastically independent in $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}(p \times q)\big)$.**

Proposition 3.7. *Let* $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ *and* $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$ *be experiments and let* $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ *and* $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ *be the corresponding classical random experiments. Then the following are equivalent*

- (i) $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ *and* $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$ *are stochastically independent in their joint experiment* $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}(p \times q)\big)$.
- (ii) $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ *and* $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ *are stochastically independent in their classical joint random experiment* $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, p \times q)$.

Proof. (i) implies (ii). The assertion follows from the preceding corollary.

(ii) implies (i). From the stochastic independence of $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ and $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ in $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, p \times q)$ it follows that the choice of probability measure q on $\mathbf{B}$ (the choice of stochastic information on the event space $(\Xi, \mathbf{B})$) does not discriminate the choice of a probability measure s on $\mathbf{A}$ (the choice of stochastic information on the event space $(\Omega, \mathbf{A})$). Analogously, the choice of probability measure p on $\mathbf{A}$ does not discriminate the choice of a probability measure t on $\mathbf{B}$. Consequently, the degenerated statistical map $T_g \colon \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ such that $T_g(s) = q$ for all $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ is the unique statistical map of $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ into $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ respecting condition (ii). Analogously, the degenerated statistical map $T_f \colon \mathcal{P}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ such that $T_f(t) = p$ for all $t \in \mathcal{P}(\mathbf{B})$ is the unique statistical map of $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ into $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ respecting condition (ii). Since both T_g and T_f are degenerated, the experiments $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ and $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$ are stochastically independent in their joint experiment $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}\big), \int(.)\mathrm{d}(p \times q)$. □

4. Remarks on conditional probability

Consider a g-joint of experiments $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ and $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$. According to Proposition 2.10, $\overline{r} = \overline{p} \circ (id \otimes g)$ in the joint experiment $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r\big)$ is uniquely determined. In this section, we discuss how $\overline{r}$ reflects the "stochastic dependence/independence" of $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$ on $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$. In particular, we are interested in the construction of a "conditional probability $R(v|u)$ of $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ given $u \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$". Using the embeddings $e_1 \colon \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, $e_2 \colon \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, we will consider the conditional event $v|u$ as the event $e_1(v)|e_2(u)$ in the joint experiment $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r\big)$ and we will show that this leads to a natural construction of $R(v|u)$.

If the stochastic channel (g, T_g) is degenerated, $r = p \times q$, then no relevant stochastic information flows from the experiment $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q\big)$ to the experiment $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p\big)$, then it is natural to put $R(v|u) = \overline{r}\big(e_1(v)\big) = \overline{p}(v) = \int v\mathrm{d}p$.

For $u \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$, denote $\tilde{u} = e_2(u) \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, i.e., $\tilde{u}(\omega, \xi) = u(\xi)$, $\omega \in \Omega$, $\xi \in \Xi$ and, for $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$, denote $\tilde{v} = e_1(v) \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$. Each pair $\big((\omega, \xi), a\big)$, $0 < a \leq \tilde{u}(\omega, \xi)$, can be considered as a "fuzzy outcome supporting $\tilde{u}$" and the set $M_{\tilde{u}} = \big\{((\omega, \xi), a); 0 < a \leq \tilde{u}(\omega, \xi)\big\}$ can be considered as the "conditioning fuzzy event in $\mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ and $\int \tilde{u} \mathrm{d}r$ measures "how big" the set $M_{\tilde{u}}$ is. For $A \in \mathbf{A}$, put $\widetilde{\chi_A} = e_1(\chi_A) = \chi_{A \times \Xi} \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$. Then the set $M_{\chi_A . u} = M_{\widetilde{\chi_A} . \tilde{u}} = M_{\widetilde{\chi_A}} \cap M_{\tilde{u}} = \big\{((\omega, \xi), a); 0 < a \leq \tilde{u}(\omega, \xi), \omega \in A\big\}$ can be considered as "the set of all fuzzy outcomes supporting $\widetilde{\chi_A}$ given $\tilde{u}$". For $0 < \int \tilde{u} \mathrm{d}r = \int u \mathrm{d}q$, put

$$R(\chi_A | u) = \frac{\int \widetilde{\chi_A} . \tilde{u} \mathrm{d}r}{\int \tilde{u} \mathrm{d}r}.$$

Clearly, for each $u \in \mathcal{M}(\mathbf{B}), 0 < \int \tilde{u} \mathrm{d}r = \int u \mathrm{d}q$, $R(\chi_A | u)$ defines a probability measure $R(.|u)$ on $\mathbf{A}$. Finally, $R(.|u)$ is an observable into $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ and hence it can be uniquely extended to an observable over $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ into $\mathcal{M}(\mathbf{T})$. Then,

$$R(v|u) = \frac{\int \tilde{v} . \tilde{u} \mathrm{d}r}{\int \tilde{u} \mathrm{d}r}, \qquad v \in \mathcal{M}(\mathbf{A}) \tag{$*$}$$

yields the only natural definition of generalized conditional probability based on the stochastic channel (g, T_g) and the corresponding g-joint.

Definition 4.1. Consider a g-joint of experiments $\big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.) \mathrm{d}p\big)$ and $\big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.) \mathrm{d}q\big)$. Let $u \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$, $0 < \int \tilde{u} \mathrm{d}r = \int u \mathrm{d}q$. Then, the observable $R(.|u) \colon \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{T})$ defined by $(*)$ is said to be the **conditional probability given** u.

For generalized probability domains (MV-algebras, Łukasiewicz tribes, D-posets, ...), an additional binary operation "product" has been studied primarily in connection with joint observables, stochastic independence, conditional expectation, and conditional probability, e.g., in [7], [8], [10], [25], [26], [28], [30], [31], [39], [40], [43]. It is known [31], [40] that in a full Łukasiewicz tribe the "product" reduces to the usual pointwise product of functions.

Observe that the construction of generalized conditional probability for MV-algebras and D-posets is based on the operation of product. In [10], [31], for $u, v \in \mathcal{M}(\mathbf{A}), 0 < \int u \mathrm{d}p$, $P(v|u)$ is defined via $(\int v.u \mathrm{d}p)/(\int u \mathrm{d}p)$. Our construction fully supports "conditioning via product" and, what is more important, we claim that for full Łukasiewicz tribes the "conditioning via product" is uniquely determined.

Lemma 4.2. *Let $R(.|u) \colon \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{T})$ be the conditional probability given $u \in \mathcal{M}(\mathbf{B}), 0 < \int \tilde{u} \mathrm{d}r = \int u \mathrm{d}q$, defined by $(*)$. Then, for each $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ we have $\int \tilde{v} . \tilde{u} \mathrm{d}r = \int v . g(u) \mathrm{d}p$ and $\int \tilde{u} \mathrm{d}r = \int g(u) \mathrm{d}p$.*

Proof. First, from $\overline{r} = \overline{p} \circ (id \otimes g)$ we get $\int \tilde{v}.\tilde{u} \mathrm{d}r = \int (id \otimes g)(\tilde{v}.\tilde{u}) \mathrm{d}p$. Second, from $(\otimes)$ we get $(id \otimes g)(\tilde{v}.\tilde{u}) = v.g(u)$. Thus, $\int \tilde{v}.\tilde{u} \mathrm{d}r = \int v.g(u) \mathrm{d}p$. Now, the other assertion follows from the fact that $\tilde{u} = \widetilde{\chi_\Omega}.\tilde{u}$. ☐

The following special case might be of interest. Consider a g-joint of experiments

$$\Big(\mathcal{P}(\mathbf{A}), \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int (.)\mathrm{d}p\Big) \quad \text{and} \quad \Big(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int (.)\mathrm{d}q\Big),$$

where the two experiments are identical and $g \equiv id$ is the identity observable. Let $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$, $0 < \int u \mathrm{d}p$. Then, for each $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ we have

$$R(v|u) = \frac{\int v.u \mathrm{d}p}{\int u \mathrm{d}p}$$

and for $u = \chi_B, v = \chi_A, A, B \in \mathbf{A}, p(B) > 0$ we get

$$R(v|u) = \frac{\int v.u \mathrm{d}p}{\int u \mathrm{d}p} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Finally, observe that the usual approach to independence via conditional probability is compatible with our approach via stochastic channels.

REFERENCES

[1] ADÁMEK, J.: *Theory of Mathematical Structures.* Reidel, Dordrecht, 1983.

[2] BABICOVÁ, D.: *Probability integral as a linearization*, Tatra Mt. Math. Publ. **72** (2018), 1–15.

[3] BARNETT, J. H.: *Origins of Boolean algebra in the logic of classes: George Boole, John Venn, and C. S. Pierce*, `www.maa.org/publications/periodicals/convergence`

[4] BUGAJSKI, S.: *Statistical maps I. Basic properties*, Math. Slovaca **51** (2001), 321–342.

[5] ______ *Statistical maps II. Operational random variables*, Math. Slovaca **51** (2001), 343–361.

[6] CHOVANEC, F.—KÔPKA, F.: *D-posets.* In: *Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures: Quantum Structures* (K. Engesser et al., eds.), Elsevier, Amsterdam, 2007, pp. 367–428.

[7] CHOVANEC, F.—DROBNÁ, E.—KÔPKA, F.—NÁNÁSIOVÁ, O.: *Conditional states and independence in D-posets*, Soft Comput. **14** (2014), 1027–1034.

[8] DI NOLA, A.—DVUREČENSKIJ, A.: *Product MV-algebras*, Multi. Val. Logic **6** (2001), 193–215.

[9] DVUREČENSKIJ, A.—PULMANNOVÁ, S.: *New Trends in Quantum Structures.* In: *Mathematics and its Applications*, Vol. 516, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Ister Science, Bratislava, 2000.

[10] ______ *Conditional probability on σ-MV-algebras*, Fuzzy Sets Syst. **155** (2005), 102–118.

[11] ELIAŠ, P.—FRIČ, R.: *Factorization of observables*, Internat. J. Theoret. Phys. **56** (2017), 4073–4083.

[12] FOULIS, D. J.—BENNETT, M. K.: *Effect algebras and unsharp quantum logics*, Found. Phys. **24**, (1994), 1331–1352.

[13] FRANZ, U.: *What is stochastic independence?* In: *Quantum Probab. White Noise Anal.*, Vol. 16: *Non-Commutativity, Infnite-Dimensionality and Probability at the Crossroads* (N. Obata et al., eds.), Proc. of the RIMS Workshop on Infnite Dimensional Analysis and Quantum Probability, Kyoto, Japan, 2001 World Scientifc, 2003 (arXiv:math/0206017 [math.QA]).

[14] FRIČ, R.: *Remarks on statistical maps and fuzzy (operational) random variables*, Tatra Mt. Math. Publ. **30** (2005), 21–34.

[15] ______ *On D-posets of fuzzy sets*, Math. Slovaca **64** (2014), 545–554.

[16] FRIČ, R.—PAPČO, M.: *On probability domains*, Internat. J. Theoret. Phys. **49** (2010), 3092–3100.

[17] ______ *A categorical approach to probability*, Studia Logica **94** (2010), 215–230.

[18] ______ *Fuzzification of crisp domains*, Kybernetika **46** (2010), 1009–1024.

[19] ______ *On probability domains II*, Internat. J. Theoret. Phys. **50** (2011), 3778–3786.

[20] ______ *On probability domains III*, Internat. J. Theoret. Phys. **54** (2015), 4237–4246.

[21] ______ *Upgrading probability via fractions of events*, Commun. Math. **24** (2016), 29–41.

[22] ______ *Probability: from classical to fuzzy*, Fuzzy Sets Syst. **326** (2017), 106–114.

[23] ______ *On probability domains IV*, Internat. J. Theoret. Phys. **56** (2017), 4084–4091.

[24] GUDDER, S.: *Fuzzy probability theory*, Demonstratio Math. **31** (1998), 235–254.

[25] JUREČKOVÁ, M.: *On the conditional expectation on probability MV-algebras with product*, Soft Comput. **5** (2001), 381–385.

[26] KALINA, M.—NÁNÁSIOVÁ, O.: *Conditional states and joint distributions on MV-algebras*, Kybernetika **42** (2006), 129–142.

[27] KOLMOGOROV, A. N.: *Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer, Berlin, 1933.

[28] KÔPKA, F.: *Quasi product on Boolean D-posets*, Int. J. Theor. Phys. **47** (2008), 26–35.

[29] KÔPKA, F.—CHOVANEC, F.: *D-posets*, Math. Slovaca **44** (1994), 21–34.

[30] KROUPA, T.: *Many-dimensional observables on Łukasiewicz tribe: constructions, conditioning and conditional independence*, Kybernetika **41** (2005), 451–468.

[31] ______ *Conditional probability on MV-algebras*, Fuzzy Sets Syst. **149** (2005), 369–381.

[32] LOÈVE M.: *Probability Theory*. D. Van Nostrand, Inc., Princeton, New Jersey, 1963.

[33] MESIAR, R.: *Fuzzy sets and probability theory*, Tatra Mt. Math. Publ. **1** (1992), 105–123.

[34] NAVARA, M.: *Probability theory of fuzzy events.* In: 4th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology and 11 Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (E. Montseny and P. Sobrevilla eds.), Universitat Politecnica de Catalunya, Barcelona, Spain, 2005, pp. 325–329.

[35] PAPČO, M.: *On measurable spaces and measurable maps*, Tatra Mt. Math. Publ. **28** (2004), 125–140.

[36] ______ *On fuzzy random variables: examples and generalizations*, Tatra Mt. Math. Publ. **30** (2005), 175–185.

[37] ______ *On effect algebras*, Soft Comput. **12** (2008), 373–379.

[38] ______ *Fuzzification of probabilistic objects.* In: 8th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology—EUSFLAT '13) (G. Pasi et al., ed.), Milan, Italy, 2013, Atlantis Press, Amsterdam, 2013, pp. 67–71, doi:10.2991/eusat.2013.10 (2013).

[39] RIEČAN, B.: *On the product MV-algebras*, Tatra Mt. Math. Publ. **16** (1999), 143–149.

[40] RIEČAN, B.—MUNDICI, D.: *Probability on MV-algebras*, In: *Handbook of Measure Theory*, Vol. II (E. Pap, ed.), North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 869–910.

[41] RIEČAN, B.—NEUBRUNN, T.: *Integral, Measure, and Ordering*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.

[42] SKŘIVÁNEK, V.—FRIČ, R.: *Generalized random events*, Internat. J. Theoret. Phys. **54** (2015), 4386–4396.

[43] VRÁBELOVÁ, M.: *A note on the conditional probability on product MV-algebras*, Soft Comput. **4** (2000), 58–61.

[44] ZADEH, L. A.: *Probability measures of fuzzy events*, J. Math. Anal. Appl. **23** (1968), 421–27.

Received December 11, 2017

Mathematical Institute
Slovak Academy of Sciences
Grešákova 6
SK–040-01 Košice
SLOVAKIA

E-mail: babicova@saske.sk
fric@saske.sk