Diferenciálne rovnice a ich aplikácie vo finančnom modelovaní

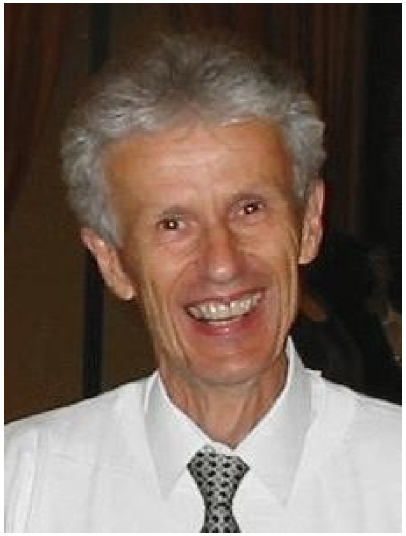
spomienka na Pavla Brunovského

(90. výročie narodenia)

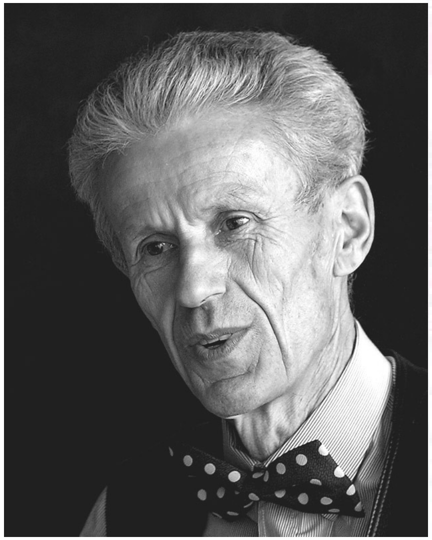
Daniel Ševčovič

65. výročie založenia Matematického ústavu SAV

Smolenice, 14. októbra 2024



Pavol Brunovský



5.12.1934 – 14.12.2018

(90. výročie narodenia)

Profesor Pavel Brunovský sa narodil 5. decembra 1934 vo Viedni.

Štúdium matematiky ukončil v roku 1958 na Prírodovedeckej fakulte UK v Bratislave.

V rokoch 1969-1970 pracoval na Ústave technickej kybernetiky Slovenskej akadémie vied

Po roku 1970-74 pôsobil na Matematickom ústave Slovenskej akadémie vied

Odvtedy aktívne pôsobil na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK

Bol hosťujúcim profesorom na univerzite vo Florencii, na Michiganskej štátnej univerzite, na univerzitách vo Viedni, v Tokiu, Nice a Paríži.

V roku 2005 mu bol udelený Pribinov kríž za zásluhy v oblasti rozvoja vedy a vzdelávania.

Pavol Brunovský
dielo

[1] P. Brunovský: O zovšeobecnených algebrických systémoch. Acta Facultatis Rerum Naturalium Universitatis Comeniana: Mathematica, Vol. 3, 1958 S. 41-54.

…

[15] P. Brunovský: Controllability and closed-loop linear controls in linear periodic system. Journal of Differential Equations, Vol. 6, No. 2 (1969), s. 296-313.

[16] P. Brunovský: A classification of linear controllable systems. Kybernetika, Vol. 6, No. 3 (1970), s. 173-188.

[17] P. Brunovský: On one-parameter families of diffeomorphisms. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 11, No. 3 (1970), s. 559-582.

[21] P. Brunovský: On one-parameter families of diffeomorphisms II: Generic branching in higher dimensions. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 12, No. 4 (1971), s. 765-784.

…

[39] P. Brunovský, A. Brunovská: Optimal temperature control of a stirred adsorber. Chem. Eng. Sci, Vol. 34 (1979), s. 379-386.

…

[52] P. Brunovský, J. Komorník: The matrix Riccati equation and the noncontrollabe linear-quadratic problem with terminal constraints. SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 21, No. 2 (1983), s. 280-288.

Pavol Brunovský
dielo

[55] P. Brunovský, Shui-Nee Chow: Generic properties of stationary state solutions of reaction-diffusion equations. Journal of Differential Equations, Vol. 53, No. 1 (1984), s. 1-23.

[63] P. Brunovský, B. Fiedler: Numbers of zeros on invariant manifolds in reaction- diffusion equations. Nonlinear Analysis-Theory, Methods & Applications, Vol. 10, No. 2 (1986), s. 179-193.

[64] P. Brunovský, B. Fiedler: Simplicity of zeros in scalar parabolic equations. Journal of Differential Equations, Vol. 62, No. 2 (1986), s. 237-241.

[66] P. Brunovský, P. Poláčik: Generic hyperbolicity for reaction - diffusion equations on symmetric domains. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 38, No. 2 (1987), s. 172-183.

…

[87] D. Ševčovič, M. Halická, P. Brunovský: DEA analysis for a large structured bank branch network. Central European Journal of Operations Research, Vol. 9, No. 4 (2001), s. 329-342.

[92] P. Brunovský, M. Lapin, I. Melicherčík, J. Somorčík, D. Ševčovič: Risks due to variability of K-day extreme precipitation totals and other K-day extreme events. Journal of Hydrology and Hydromechanics, Vol. 57, No. 4 (2009), s. 250-263.

[93] P. Brunovský, D. Ševčovič, J. Somorčík, D. Hroncová, K. Pospišilová: Socio-economic impacts of pandemic influenza mitigation scenarios in Slovakia. Ekonomický Časopis, Roč. 57, č. 2 (2009), s. 163-178.

[94] P. Brunovský, A. Černý, M. Winkler: A singular differential equation stemming from an optimal control problem in financial economics. Applied Mathematics and Optimization, Vol. 68, No. 2 (2013), s. 255-274.

Mathematics Genealogy Project

Pavol Brunovský

Ph.D. Institute of Mathematics, Slovak Academy of Sciences 1964 Slovakia

Advisor 1: Jaroslav Kurzweil, Advisor 2: Štefan Schwarz

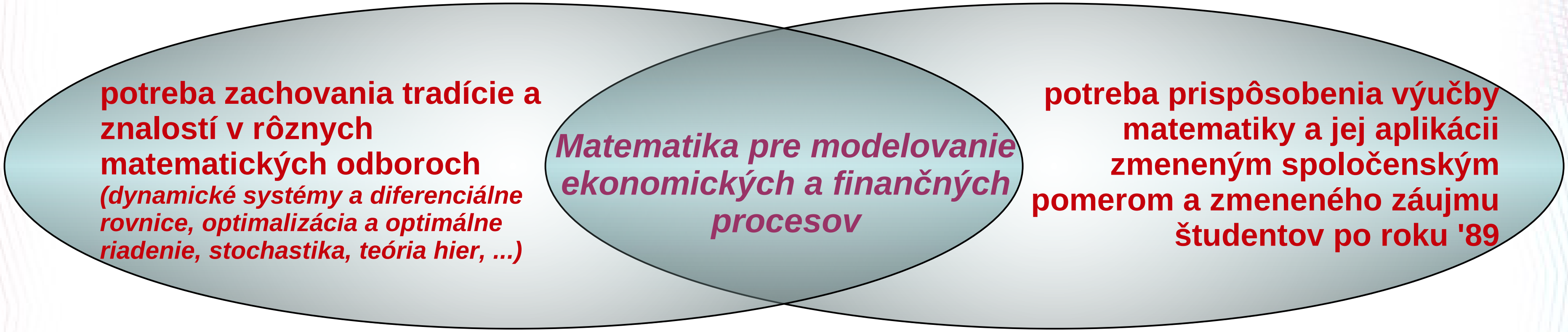
Students:

Medveď, Milan	Slovak Academy of Sciences 1974
Komorník, Jozef	Comenius University 1978
Pastor, Karol	Comenius University 1982
Meravý, Pavol	Comenius University 1984
Halická, Margaréta	Comenius University 1984
Kmeť, Tibor	Comenius University 1987
Poláčik, Peter	Comenius University 1988
Thap, Le Huy	Comenius University 1988
Fila, Marek	Comenius University 1989
Ševčovič, Daniel	Comenius University 1993
Zakopčan, Michal	Comenius University 2009
Szolgayová, Jana	Comenius University 2010
Fašungová, Lucia	Comenius University 2014
Holecyová, Mária	Comenius University 2016

According to our current on-line database, Pavol Brunovský has 14 students and 34 descendants.

Študijný program Ekonomická a finančná matematika

1993 vznik študijného programu EFM



1994 prví študenti nastupujú na program EFM

1997 spoločný rozvojový a vzdelávací projekt s Uni Pittsburg

1999 prví absolventi magisterského stupňa EFM

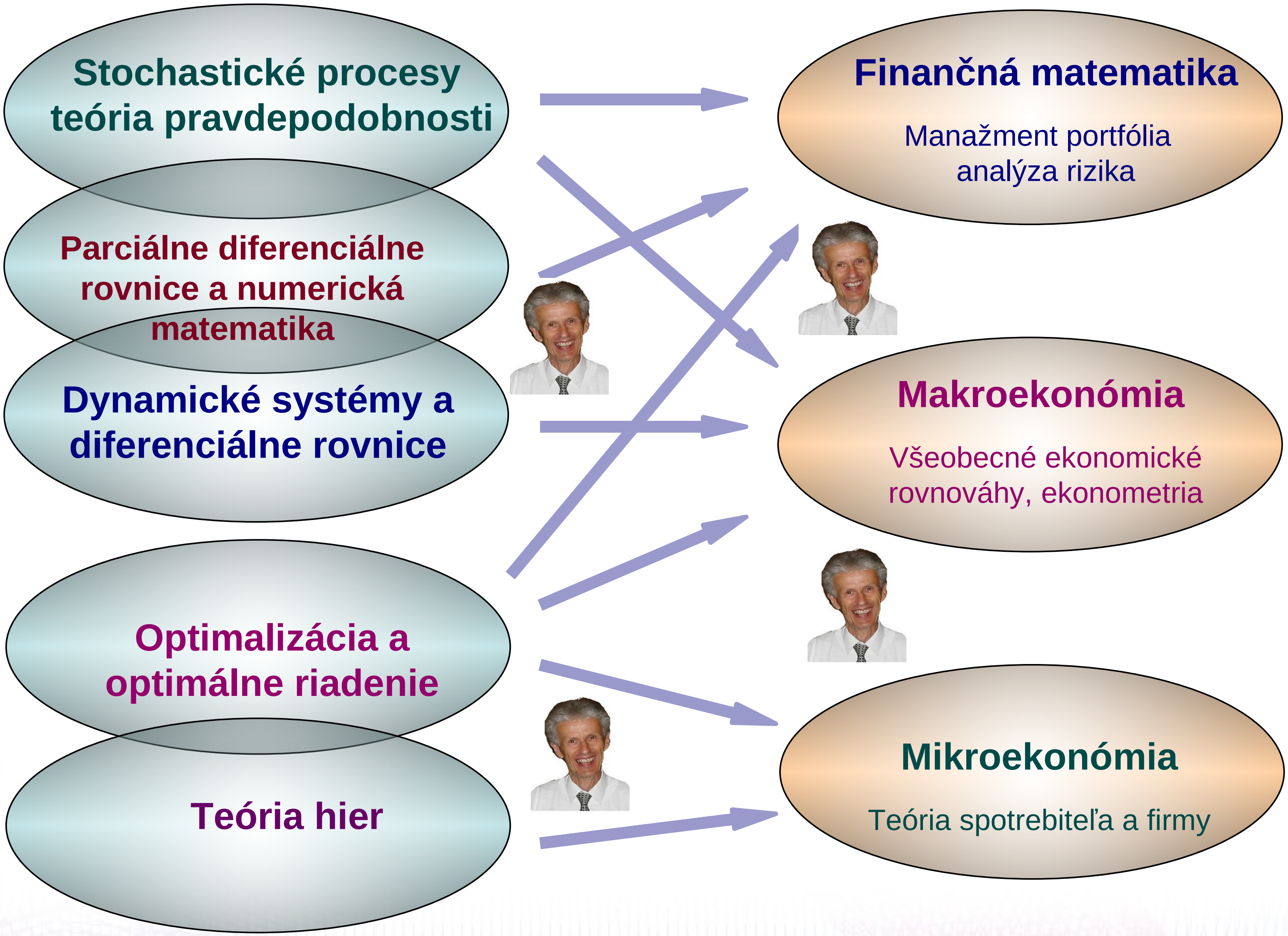
2008 prví absolventi doktorandského stupňa AplMat – EFM

2014 prvá docentka (Stehlíková) vychovaná na AplMat – EFM

2011/16 prví profesori a DrSc. pôsobiaci na AplMat – EFM

poukázali na potrebu prispôsobenia vlastného matematického výskumu

Matematika pre modelovanie ekonomických a finančných procesov



Klasická úloha o optimalizácii portfólia

Dynamická stochastická optimalizačná úloha: $\max_{\mathcal{S}_0} \mathbb{E}(U(y_T)|\ y_0)$

- $dy_t = A(\theta_t, y_t, t)dt + B(\theta_t, y_t, t)dW_t$ je Itō-ov stochastický proces,
- $\mathcal{S}_t = \{(\tau, \theta_\tau),\ \ t \le \tau \le T\}$ je množina riadení zloženia portfólia, $\theta_\tau \in \Delta_\tau$

Aplikácia na optimalizáciu portfólia dôchodkového sporenia

- $A(\theta, y, t) = \varepsilon + \left[\mu_t(\theta) - \beta_t\right]y$, ε je miera odvodov, $\mu_t(\theta)$ návratnosť portfólia, β_t rast miezd, y je počet nasporených ročných platov
- $B(\theta, y, t) = \sigma_t(\theta)y$, $\sigma_t(\theta)$ je volatilita portfólia pozostávajúceho z $\theta\%$ akcií a $(1-\theta)\%$ dlhopisov, $\Delta_t = [0, 1]$
- $U(y) = -y^{1-a}$ je Arrow-Prattova izoelastická funkcia užitočnosti sporiteľa

Hamilton–Jacobi–Bellmanova rovnica

pre čiastočnú funkciu užitočnosti: $V(y, t) = \max_{\mathcal{S}_t} \mathbb{E}(U(y_T)|\ y_t = y)$ platí HJB rovnica

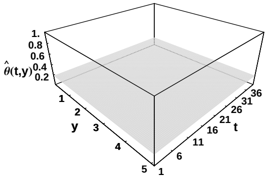
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \max_{\theta \in \Delta_t} \left\{ \frac{1}{2} B^2(\theta, y, t) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + A(\theta, y, t) \frac{\partial V}{\partial y} \right\} = 0, \qquad V(y, T) = U(y), \quad y > 0$$

Transformácia HJB na kvázilineárnu parabolickú PDR

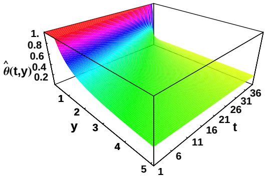
$V_t + \max_{\theta\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}\theta^2 V_{xx} + \theta V_x\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad V_t - \frac{1}{2}\frac{(V_x)^2}{V_{xx}} = 0$, kde $\hat{\theta}(t,x) = -\frac{V_x(t,x)}{V_{xx}(t,x)}$

Riccatiho transformácia $\psi = -\frac{V_{xx}}{V_x} \quad \Longrightarrow \quad \psi_t + \frac{1}{2}\beta(\psi)_{xx} = 0$, kde $\beta(\psi) = -\frac{1}{\psi}$

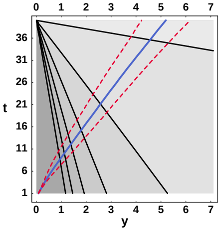
Obmedzenie $\theta \le 1 \quad \Longrightarrow \psi \ge 1$ vedie na úlohu s voľnou hranicou pre ψ



Merton-Samuelson, $\varepsilon = 0\%$



SVK II. pilier $\varepsilon = 9\%$



M-C simulácie y_t s optim. θ_t

* Analýza Mertonovho modelu pre portfólio s príspevkami $\varepsilon > 0$
* Kvalitatívna analýza a numerická aproximácia PDR po Riccatiho transformácii
* Kvalitatívne a kvantitatívne implikácie pre II. pilier SVK dôchodkového sporenia

Oceňovanie Amerických typov opcií – Black-Scholesova teória

$$V(S,t) = \max_{T_t} \mathbb{E}(V(S_{T_t}, T) \,|\, S_t = S)$$

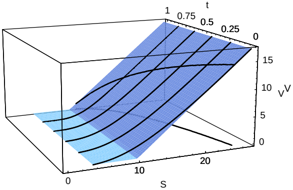
- $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$, $\{S_t, t \in [0,T]\}$, je geometrický Brownov pohyb,
- argument maxima $T_t^* = T_t^*(S)$ je optimálny čas uplatnenia opcie

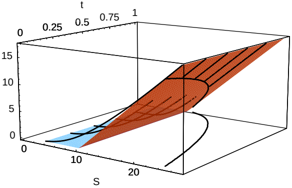
Feynman-Kacova formula pre problém s voľnou hranicou

Hľadá sa riešenie $V(S,t)$ spoločne s voľnou hranicou $S_f(t)$ úlohy:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \qquad 0 < t < T,\ 0 < S < S_f(t)$$

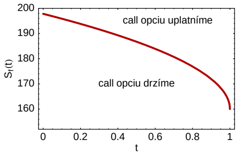
$$V(0,t) = 0,\ V(S_f(t),t) = S_f(t) - E,\ \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t),t) = 1,\ V(S,T) = (S-X)^+$$

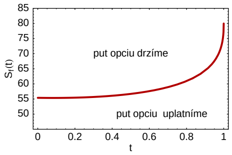




Znázornenie riešenia $V(S,t)$ a polohy voľnej hranice $S_f(t)$ pre kúpnu (call) opciu

Hranica $t \mapsto S_f(t)$ predčasného uplatnenia call opcie a put opcie.





- Nie je známe explicitné vyjadrenie voľnej hranice predčasného uplatnenia opcie
- Aproximácie vychádzajú z nelineárnych integrálnych rovníc zostavených pre S_f

$$S_f(T-\tau) \approx \frac{rX}{q}\left(1 + 0.638\,\sigma\sqrt{\tau}\right) \qquad S_f(T-\tau) \approx X\left(1 - \sigma\sqrt{-\tau \ln\left[\frac{2r}{\sigma}\sqrt{2\pi\tau}e^{r\tau}\right]}\right)$$

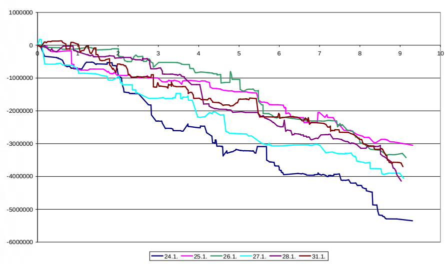
* Odvodenie asymptoticky presnej formuly pre $S_f(t)$ pre put opciu
* Odvodenie nelineárnej integrálnej rovnice pre $S_f(t)$ pre call i put opciu
* Odvodenie rýchlej a robustnej numerickej schémy na jej riešenie
* Zovšeobecnenie postupu pre nelineárne Black–Scholesove rovnice

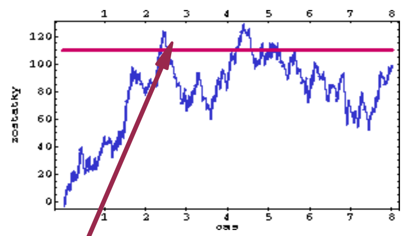
Stochastické metódy operačnej analýzy

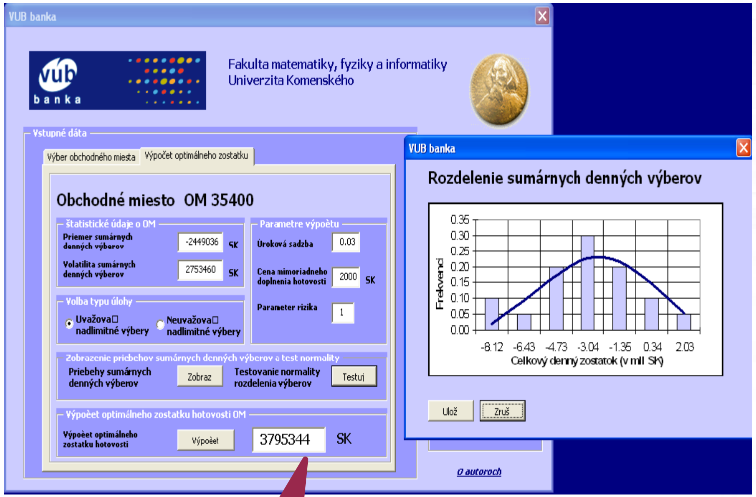
2005 Úloha o určení optimálnej rezervy hotovosti na bankových pobočkách

Denný priebeh zostatkov hotovosti na pobočke banky sleduje Brownov pohyb s odhadnuteľným driftom a volatilitou

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$$







$$\Pi(r) = Prob\left(\sup_{t\in[0,T]} X_t \le r\right)$$

$$r_{opt} = \arg\min \phi(r)$$

$$\phi(r) = b\int_{-\infty}^{r} (r-\xi)d\Pi(\xi) + d(1-\Pi(r))$$

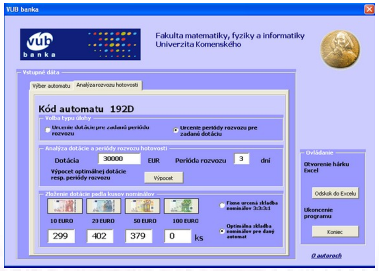
Zovšeobecnenie Orr-Millerovho modelu na určovanie optimálnej zásoby hotovosti

---

2005 Úloha o určení optimálnej rozvozu hotovosti do bankových automatov

Nájsť optimálnu periódu rozvozu a skladbu nominálov pre ATM bankomaty

P.Brunovský, B.Stehlíková, DŠ.



> 30 rokov Ekonomickej a finančnej matematiky

a budovania úspešného študijného programu

25 ročníkov absolventov programu EFM

Vyše 1000 úspešných absolventov